Trigonometria del Triángulo Rectángulo

Bill Zahner, (BillZ)
CK12 Editor

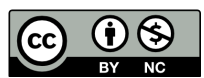


AUTHORS
Bill Zahner, (BillZ)
CK12 Editor

To access a customizable version of this book, as well as other interactive content, visit www.ck12.org

Printed: September 23, 2013





CHAPTER 1 Trigonometria del Triángulo Rectángulo

CHAPTER OUTLINE

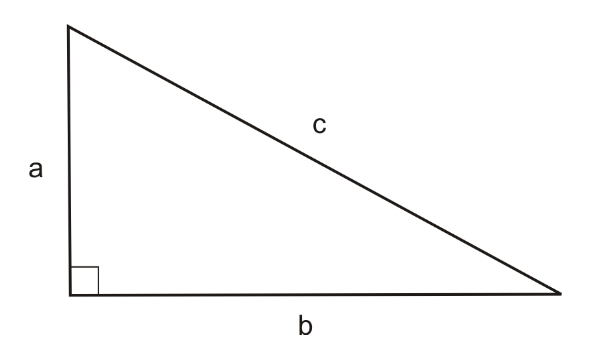
1.1 El teorema de Pitágoras

Objetivos de aprendizaje

- Identificar y emplear el Teorema de Pitágoras cuando se trabaja con triángulos rectángulos.
- Identificar Ternas Pitagóricas comunes.
- Usar el Teorema Pitagórico para encontrar el área de triángulos Isósceles.
- Usar el Teorema de Pitágoras para obtener la fórmula de la distancia en una cuadrícula de coordenadas.

Introducción

El triángulo de abajo es un triángulo rectángulo.



Los lados marcados a y b son llamados los **catetos** de un triángulo y ellos se encuentran en el ángulo recto. El tercer lado, marcado c es llamado la **hipotenusa.** La hipotenusa es opuesta al ángulo recto. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es también el lado más largo.

El Teorema de Pitágoras establece que la longitud de la hipotenusa al cuadrado será igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos. En el triángulo de arriba, la suma de los cuadrados de los catetos es a^2+b^2 y el cuadrado de la hipotenusa es c^2.

El Teorema de Pitágoras : Dado un triángulo rectángulo con catetos cuyas longitudes son a y b y una hipotenusa de longitud c,

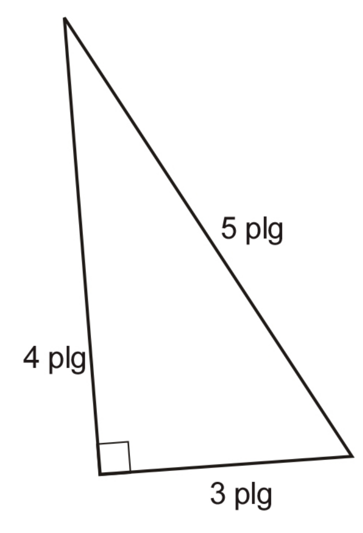
$$a^2+b^2=c^2$$

Se cuidadoso cuando usas este teorema—tú debes asegurarte que los lados están marcados a y b y la hipotenusa está marcada c para usar esta ecuación. Una forma más precisa para escribir el Teorema de Pitágoras es:

$$(\text{cateto}_1)^2+(\text{cateto}_2)^2=\text{hipotenusa}^2$$

Ejemplo 1

Usar las longitudes de los lados del siguiente triángulo para probar el Teorema de Pitágoras.



Los lados del triángulo de arriba son 3 pulgadas y 4 pulgadas . La hipotenusa es 5 pulgadas . Entonces, $a = 3, b = 4$, y $c = 5$. Podemos sustituir estos valores en la fórmula para el Teorema de Pitágoras para verificar que la relación funciona:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 9 + 16 &= 25 \\ 25 &= 25 \end{aligned}$$

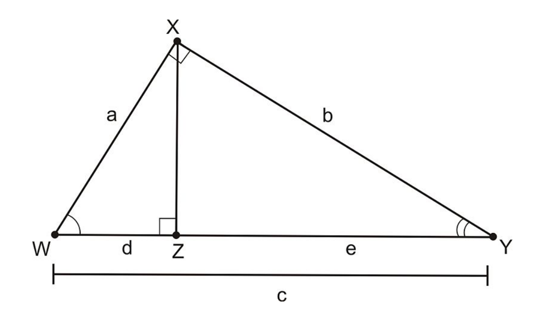
Ya que ambos lados de la ecuación son iguales a 25, la ecuación es verdadera. Por lo tanto, el Teorema de Pitágoras funciona en este triángulo rectángulo.

Prueba del teorema de Pitágoras

Existen muchas formas para probar el Teorema de Pitágoras. Una de las formas más directas es usar triángulos semejantes. Empieza con un triángulo rectángulo y construye una altitud desde el ángulo recto a los lados opuestos. En la figura de abajo, podemos ver las siguientes relaciones:

Prueba.

- Dado: $\triangle WXY$ como se muestra en la figura de abajo
- Probar: $a^2 + b^2 = c^2$



Primero comenzamos con un enunciado de semejanza de triángulos:

$$\triangle WXY \sim \triangle WZX \sim \triangle XZY$$

Estos son todos verdaderos por el postulado de semejanza de triángulo AA .
Ahora, usando triángulos semejantes, podemos establecer las proporciones siguientes:

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{c}$$
$$a^2 = dc$$

y

$$\frac{e}{b} = \frac{b}{c}$$
$$b^2 = ec$$

Colocando juntas estas ecuaciones usando sustitución,

$$a^2 + b^2 = dc + ec$$

factorizando el lado derecho,

$$a^2 + b^2 = c(d + e)$$

pero nota $d + e = c$, por lo que se convierte en

$$a^2 + b^2 = c(c)$$

$$a^2 + b^2 = c^2. \blacklozenge$$

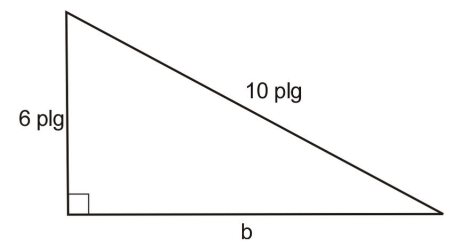
Hemos terminado de probar el Teorema de Pitágoras. Existen cientos de otras formas para probar el Teorema de Pitágoras y una de esas pruebas alternativas está en los ejercicios de esta sección.

Haciendo uso del teorema de Pitágoras

Como sabes desde el algebra, si tú tienes una variable desconocida en una ecuación, tú puedes resolverla para encontrar su valor. Por lo tanto, si tú conoces, las longitudes de dos de tres lados en un triángulo rectángulo, puedes usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del lado faltante, si es un cateto o una hipotenusa. Se cuidadoso en usar operaciones inversas correctamente y evitar errores por descuido.

Ejemplo 2

Cuál es la longitud de b en el triángulo de abajo?



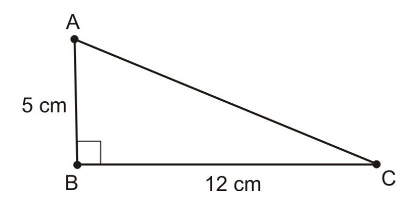
Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del lado faltante, b. Establecer la ecuación $a^2+b^2=c^2$, dejando $a=6$ y $b=10$. Asegúrate de simplificar los exponentes y raíces cuidadosamente, recuerda usar operaciones inversas para resolver la ecuación, y siempre guarda ambos lados de la ecuación balanceada.

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &= c^2\\
6^2+b^2 &= 10^2\\
36+b^2 &= 100\\
36+b^2-36 &= 100-36\\
b^2 &= 64\\
\sqrt{b^2} &= \sqrt{64}\\
b &= \pm 8\\
b &= 8
\end{aligned}$$

En álgebra aprendiste que $\sqrt{x^2}=\pm x$ porque, por ejemplo, $(5)^2=(-5)^2=25$. Sin embargo, en este caso (y en muchos de la geometría), solo estamos interesados en la solución positiva de $b=\sqrt{64}$ porque longitudes geométricas son positivas. Entonces, en el ejemplo 2, podemos hacer caso omiso de la solución $b=-8$, y nuestra respuesta final es $b=8$ pulgadas.

Ejemplo 3

Encontrar la longitud del lado faltante en el triángulo de abajo.



Usar el Teorema de Pitágoras para establecer y resolver una ecuación y resolver el lado faltante. Dejar $a=5$ y $b=12$.

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 \\ 5^2+12^2 &= c^2 \\ 25+144 &= c^2 \\ 169 &= c^2 \\ \sqrt{169} &= \sqrt{c^2} \\ 13 &= c \end{aligned}$$

Entonces, la longitud del lado faltante es 13 centmetros.

Uso de ternas Pitagóricas

En el ejemplo 1, los lados del triángulo eran $3,4$, y 5. Esta combinación de números se conoce como una **Terna Pitagórica**. Una Terna Pitagórica son tres números que hacen el Teorema de Pitágoras verdadero y ellos son *enteros* (números enteros sin decimales o fracción). A través de este capítulo, también usarás otras ternas Pitagóricas. Por ejemplo, el triángulo en el ejemplo 2 es proporcional a la misma relación de $3:4:5$. si tu divides las longitudes del triángulo en el ejemplo 2 $(6,8,10)$ por dos, encuentras la misma proporción —$3:4:5$. Siempre que encuentras una terna Pitagórica, puedes aplicar esas proporciones con mayores factores también. Finalmente, toma nota de las longitudes de los lados del triángulo en el ejemplo 3—$5:12:13$. Esto, también es una terna Pitagórica. Puedes extrapolar que esta proporción, multiplicada por factores más grandes , también arrojará números que satisfacen el Teorema de Pitágoras.

Existen infinitas ternas Pitagóricas, pero unas de las más comúnes y sus múltiplos son:

TABLE 1.1:

Triple	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$
$3-4-5$	$6-8-10$	$9-12-15$	$12-16-20$
$5-12-13$	$10-24-26$	$15-36-39$	$20-48-52$
$7-24-25$	$14-48-50$	$21-72-75$	$28-96-100$
$8-15-17$	$16-30-34$	$24-45-51$	$32-60-68$

Area de un triángulo Isósceles

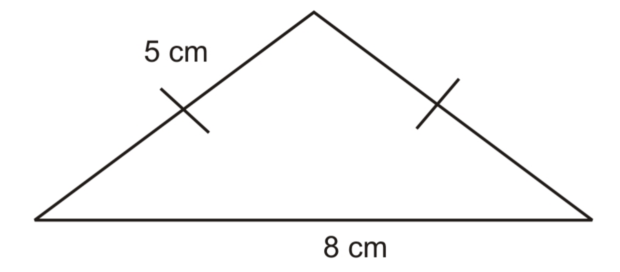
Existen muchas aplicaciones del Teorema de Pitágoras. Una forma de usar el Teorema de Pitágoras es identificar las alturas en triángulos isósceles así puedes calcular el área. El área de un triángulo es la mitad del producto de su base y su altura (también llamada altitud). Esta fórmula se muestra abajo.

$$A = \frac{1}{2}bh$$

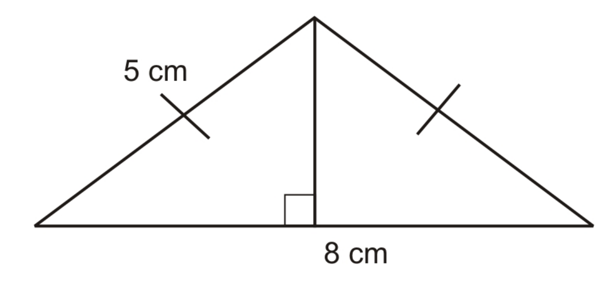
If you are given the base and the sides of an isosceles triangle, you can use the Pythagorean Theorem to calculate the height. Recall that the height (altitude) of a triangle is the length of a segment from one angle in the triangle perpendicular to the opposite side. In this case we focus on the altitude of isosceles triangles going from the vertex angle to the base.

Ejemplo 4

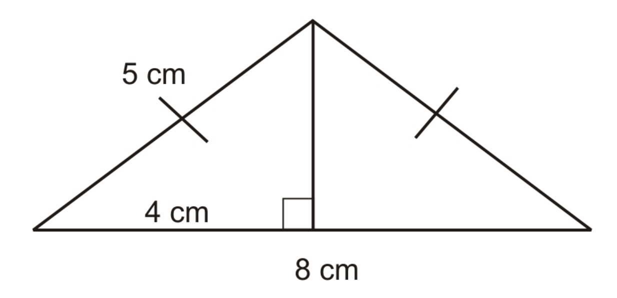
Cuál es la altura del triángulo de abajo?



Para encontrar el área de este triángulo isósceles, tú necesitarás saber la altura en adición a la base. Dibujar en la altura conectando el vértice del triángulo con la base en el ángulo recto.



Ya que el triángulo es isósceles, la altitud dividirá la base. Eso significa que lo dividirá en dos partes congruentes, o partes iguales. Así, tú puedes identificar la longitud de una mitad de la base como 4 centmetros.



Si tú observas al triángulo más pequeño ahora inscrito en la figura original, notarás que es un triángulo rectángulo con un lado 4 e hipotenusa 5. Entonces, este es un triángulo $3:4:5$. Si el lado es 4 cm y la hipotenusa es 5 cm, el lado faltante debe ser 3 cm. Entonces, la altura del triángulo isósceles es 3 cm.

Usar esta información junto con la medida original de la base para encontrar el área del triángulo isósceles completo .

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}bh \\
&= \frac{1}{2}(8)(3) \\
&= \frac{1}{2}(24) \\
&= 12
\end{aligned}$$

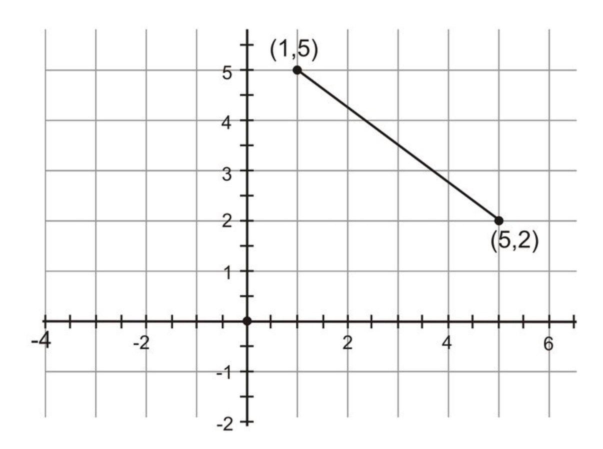
El área del triángulo Isósceles completo es 12 cm^2.

La fórmula de distancia

Tú ya has aprendido que puedes usar el Teorema de Pitágoras para entender diferentes tipos de triángulos rectángulos, encontrar longitudes faltantes, e identificar ternas Pitagóricas. También puedes aplicar el Teorema de Pitágoras a una cuadrícula de coordenadas y aprender como usarla para encontrar distancias entre puntos.

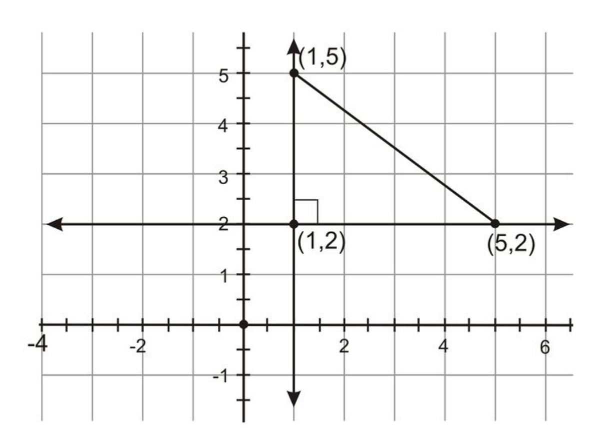
Ejemplo 5

Observa los puntos en la cuadrícula de abajo.



Encontrar la longitud del segmento conectando $(1,5)$ *y* $(5,2)$.

La pregunta te pide identificar la longitud del segmento. Porque el segmento no es paralelo a cualquiera de los ejes, es difícil medir dada la cuadrícula de coordenadas. Sin embargo, es posible pensar en este segmento como la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Dibujar una línea vertical en $x = 1$ y una línea horizontal en $y = 2$ y encontrar el punto de intersección. Este punto representa el tercer vértice en el triángulo rectángulo.



Tú puedes contar fácilmente las longitudes de los lados de este triángulo en la cuadrícula. El lado vertical se extiende desde $(1,2)$ a $(1,5)$, entonces es $|5-2| = |3| = 3$ unidades de largo. El lado horizontal se extiende desde $(1,2)(5,2)$, entonces es $|5-1| = |4| = 4$ unidades de largo. Usar el Teorema de Pitágoras con estos valores para las longitudes de cada lado para encontrar la longitud de la hipotenusa.

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 \\ 3^2+4^2 &= c^2 \\ 9+16 &= c^2 \\ 25 &= c^2 \\ \sqrt{25} &= \sqrt{c^2} \\ 5 &= c \end{aligned}$$

El segmento conectando $(1,5)$ y $(5,2)$ es 5 unidades de largo.

Los matemáticos han simplificado este proceso y creado una fórmula que usa estos pasos para encontrar la distancia entre dos puntos cualquiera en el plano de coordenas. Si tú usas la fórmula de la distancia, no tienes que dibujar las líneas extra.

Fórmula de la Distancia: Dado los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), la longitud del segmento conectando esos dos puntos es $D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Ejemplo 6

Usar la fórmula de distancia $D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ *para encontrar la distancia entre los puntos* $(1,5)$ *y* $(5,2)$ *en una cuadrícula de coordenadas.*

Tú ya sabes desde el ejemplo 1 que la distancia será 5 unidades, pero puedes practicar usando la fórmula de la distancia para estar seguro que funciona. En esta fórmula, sustituir 1 por $x_1, 5$ para $y_1, 5$ por x_2, y 2 por y_2 porque $(1,5)$ y $(5,2)$ son los dos puntos en cuestión.

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ahora ves que no importa que método uses para resolver este problema, la distancia entre $(1,5)$ y $(5,2)$ en una cuadrícula coordenada es 5 unidades.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos, como trabajar con diferentes expresiones radicales ambas en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Como identificar y emplear el Teorema de Pitágoras cuando trabajamos con ángulos rectos.
- Cómo identificar ternas Pitagóricas comunes.
- Cómo usar el Teorema de Pitágoras para encontrar el área de triángulos Isósceles.
- Cómo usar el Teorema de Pitágoras para deducir la fórmula de distancia en una cuadrícula de coordenadas.

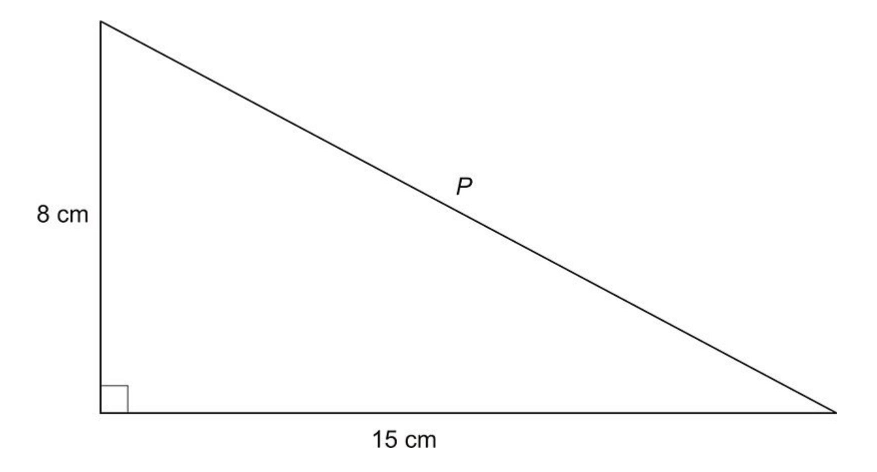
Estas habilidades te ayudarán a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Debes estar siempre atento a nuevas e interesantes formas de aplicar el Teorema de Pitágoras a situaciones matemáticas.

Puntos a considerar

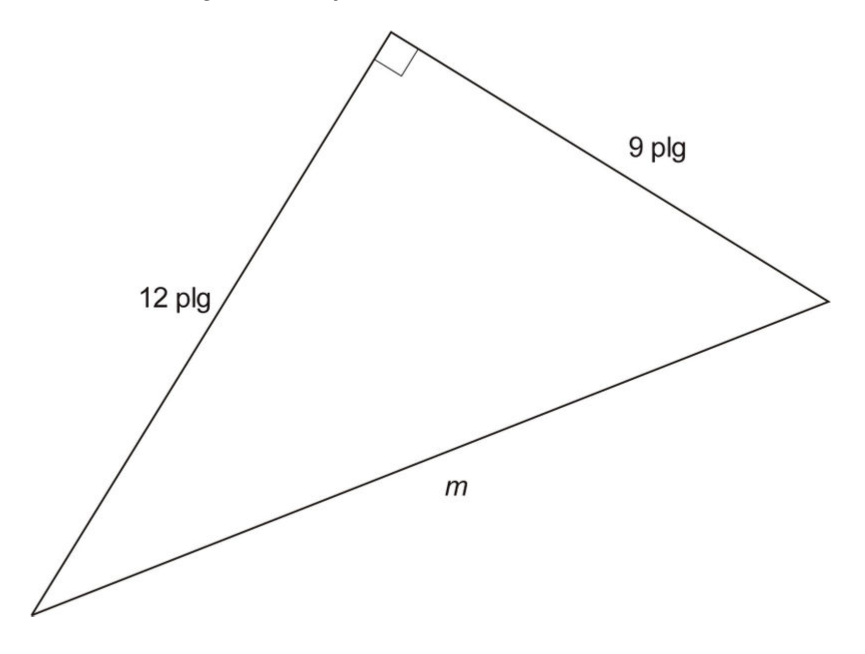
Ahora que tú has aprendido el Teorema de Pitágoras, existen formas incontables de aplicarlo. Podrías usar el Teorema de Pitágoras para probar que un triángulo contenía un ángulo recto si no tenías un diagrama preciso?

Ejercicios de repaso

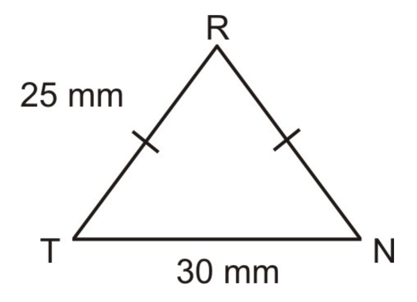
1. Cual es la distancia entre $(-5,-5)$ y $(-2,-1)$?
2. Forman los números 12, 16, y 20 una terna Pitagórica?
3. Cual es la longitud de p en el triángulo de abajo?



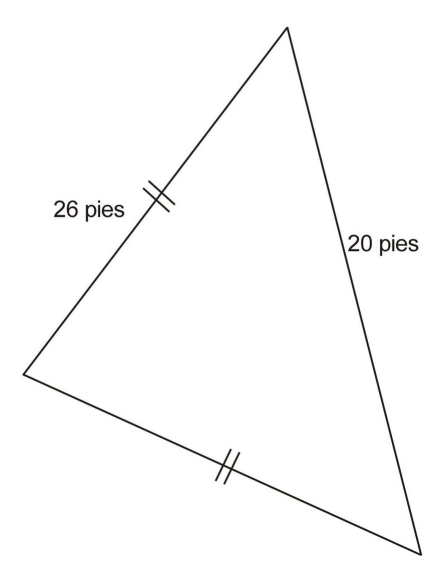
4. Forman los números $13, 26$, y 35 una terna Pitagórica?
5. Cual es la distancia entre $(1,9)$ y $(9,4)$?
6. Cual es la longitud de m en el triángulo de abajo?



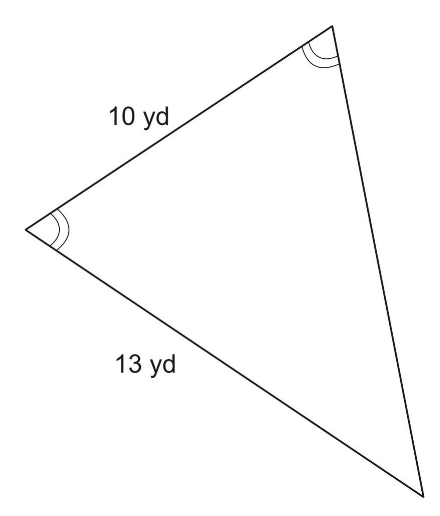
7. Cual es la distancia entre $(-3,7)$ y $(6,5)$?
8. Cual es el área del $\triangle TRN$ de abajo?



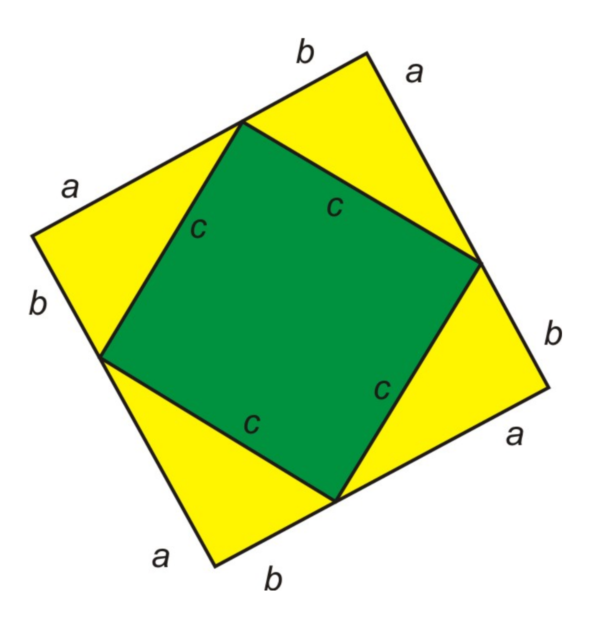
9. Cuál es el área del triángulo de abajo?



10. Cuál es el área del triángulo?



11. Una prueba alternativa de un Teorema de Pitágoras utiliza el área de un cuadrado. El diagrama de abajo muestra un cuadrado con longitudes laterales $a+b$, y un cuadrado interior con longitudes laterales c. Usa el diagrama de abajo para probar $a^2+b^2=c^2$. Pista: Encuentra el área del cuadrado interior en dos formas: una directamente, y una encontrando el área del cuadrado más grande y restando el área de cada triángulo.



Respuestas

1. 5
2. si
3. 17 pulgadas
4. no
5. $\sqrt{89}$
6. 15 pulgadas
7. $\sqrt{85}$
8. 300 milmetroscuadrados
9. 240 piescuadrados
10. 60 yardascuadradas
11. **Prueba**. El plan es, que encontraremos el área del cuadrado verde en dos formas. Ya que esas dos áreas deben ser iguales, podemos establecer esas áreas iguales entre si. Para el cuadro interior (en verde), podemos calcular directamente el área: Area del cuadrado interior $= c^2$. Ahora, el área del cuadrado grande exterior es $(a+b)^2$. No olvides multiplicar este binomial cuidadosamente!

$$\begin{aligned} \text{area} &= (a+b)^2 \\ &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2+2ab+b^2 \end{aligned}$$

El área de cada triángulo pequeño (en amarillo) es

$$\text{area} = \frac{1}{2}ab$$

. Ya que existen cuatro de esos triángulos rectángulos, tenemos el área combinada

$$4\left(\frac{1}{2}ab\right) = 2ab$$

Finalmente, sustraer el área de los cuatro triángulos amarillos del área del triángulo grande, y nos queda

$$\text{cuadrado grande} - \text{cuatro triÃ¡ngulos} = \text{area del cuadrado interior}$$
$$a^2+2ab+b^2-2ab = a^2+b^2$$

Juntando las dos diferentes formas para encontrar el área del cuadrado interior, tenemos $a^2+b^2=c^2$.

1.2 Inverso del teorema de Pitágoras

Objetivos de aprendizaje

- Entender el inverso del Teorema de Pitágoras.
- Identificar ángulos agudos a partir de las medidas de los lados.
- Identificar triángulos obtusos a partir de las medidas de los lados.
- Clasificar triángulos en formas diferentes.

Inverso del teorema de Pitágoras

En la última lección, aprendiste sobre el Teorema de Pitágoras y como puede ser usado. Como recuerdas, establece que la suma de los cuadrados de los lados de cualquier triángulo rectángulo será igual al cuadrado de la hipotenusa. Si las longitudes de los lados están marcados a y b, y la hipotenusa es c, entonces obtenemos la ecuación:

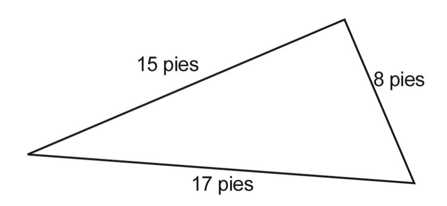
$$a^2 + b^2 = c^2$$

El **Inverso del Teorema de Pitágoras** también es verdadero. Eso es, si las longitudes de tres lados de un triángulo forman la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ verdadera, entonces representan los lados de un triángulo rectángulo.

Con este inverso, puedes usar el Teorema de Pitágoras para probar que un triángulo es un triángulo rectángulo, aún si no conoces ninguna de las medidas de los ángulos del triángulo.

Ejemplo 1

Contiene el triángulo de abajo un ángulo recto?



Este triángulo no tiene ningún ángulo recto marcado o la medida de los ángulos, entonces tú no puedes asumir que sabes si el triángulo es agudo, recto, u obtuso con sólo observarlo. Toma un momento para analizar las longitudes de los lados y observa como están relacionados. Dos de los lados $(15 \text{ y } 17)$ son relativamente cercanos en longitud. El tercer lado (8) es aproximadamente la mitad de la longitud de los dos lados más largos.

Para ver si el triángulo podría ser rectángulo, puedes tratar sustituyendo las longitudes de los lados en el Teorema de Pitágoras para ver si hacen la ecuación verdadera. *La hipotenusa es siempre el lado más largo,* entonces 17 debería ser sustituido por c. Los otros dos valores pueden representar a y b y el orden no es importante.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$8^2 + 15^2 = 17^2$$
$$64 + 225 = 289$$
$$289 = 289$$

Ya que ambos lados de la ecuación son iguales, estos valores satisfacen el Teorema de Pitágoras. Por lo tanto, el triángulo descrito en el problema es un triángulo rectángulo.

En resumen, el ejemplo 1 muestra como puedes usar el opuesto del Teorema de Pitágoras. El Teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo con lados a y b, y la hipotenusa c, $a^2 + b^2 = c^2$. El inverso del Teorema de Pitágoras establece que si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

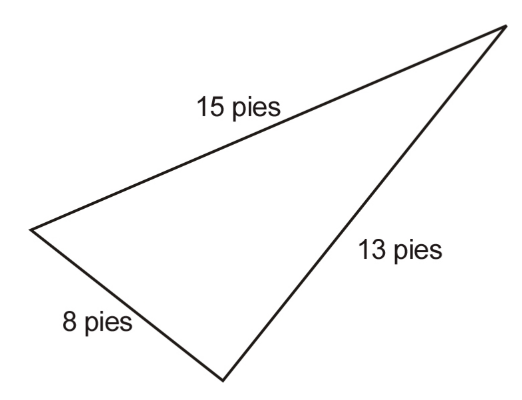
Identificando triángulos Agudos

Usando el inverso del Teorema de Pitágoras, puedes identificar si los triángulos contienen o no un ángulo recto. De todas formas, si un triángulo no contiene un ángulo recto, aún puedes aprender más acerca del triángulo usando la fórmula del Teorema de Pitágoras. Si la suma de los cuadrados de dos lados más cortos de un triángulo es **mayor** que el cuadrado del lado más largo, el triángulo es **agudo** (todos los ángulos son menores que 90°). En símbolos, si $a^2 + b^2 > c^2$ entonces el triángulo es agudo.

Identificar los lados "corto" y "largo" podría parecer ambiguo si los lados tienen la misma longitud, pero en este caso cualquier ordenamiento de lados iguales conduce al mismo resultado. Por ejemplo, un triángulo equilátero siempre satisface $a^2 + b^2 > c^2$ y entonces es agudo.

Ejemplo 2

Es el triángulo de abajo agudo o rectángulo?



Los dos lados más cortos del triángulo son 8 y 13. El lado más largo del triángulo es 15. Primero encontrar la suma de los cuadrados de los lados más cortos.

$$8^2 + 13^2 = c^2$$
$$64 + 169 = c^2$$
$$233 = c^2$$

La suma de los cuadrados de los dos lados más cortos es 233. Compara esto al cuadrado del lado más largo, 15.

$$15^2 = 225$$

El cuadrado del lado más largo 225. Ya que $8^2 + 13^2 = 233 \neq 255 = 15^2$, este triángulo no es un triángulo rectángulo. Compara los dos valores para identificar cual es mayor.

$$233 > 225$$

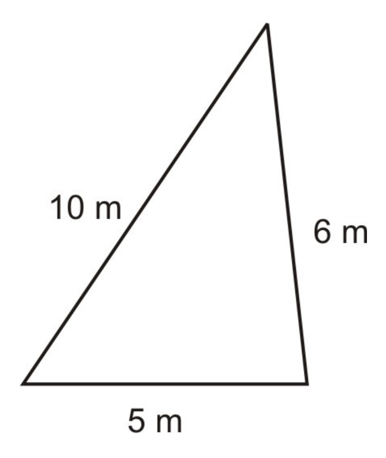
La suma de los cuadrados de los lados más cortos es mayor que el cuadrado del lado más largo. Por lo tanto, este es un triángulo agudo.

Identificando triángulos Obtusos

Como probablemente te has dado cuenta, puedes probar que un triángulo es **obtuso** (tiene un ángulo mayor que 90°) usando un método similar. Encontrar la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos en un triángulo . Si este valor es menor que el cuadrado del lado más largo, el triángulo es obtuso. En símbolos, $a^2 + b^2 < c^2$, entonces el triángulo es obtuso. Puedes resolver este problema de manera casi idéntica al ejemplo 2 de arriba.

Ejemplo 3

Es el triángulo de abajo agudo u obtuso?



Los dos lados más cortos del triángulo son 5 y 6. El lado más largo del triángulo es 10. Primero encontrar la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 5^2 + 6^2 \\ &= 25 + 36 \\ &= 61 \end{aligned}$$

La suma de los cuadrados de los lados más cortos es 61. Comparar esto con el cuadrado del lado más largo, 10.

$$10^2 = 100$$

El cuadrado del lado más largo es 100. Ya que $5^2 + 6^2 \neq 100^2$, este triángulo no es un triángulo rectángulo. Comparar los dos valores para identificar cual es mayor.

$$61 < 100$$

Ya que la suma del cuadrado de los lados más cortos es menor que el cuadrado del lado más largo, este es un triángulo obtuso.

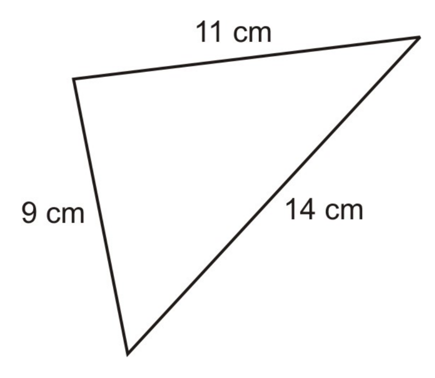
Clasificación de triángulos

Ahora que conoces las ideas presentadas en esta lección, puedes clasificar cualquier triángulo como rectángulo, agudo, u obtuso dadas las longitudes de los tres lados. Comienza por ordenar los lados del triángulo desde el más pequeño al más grande, y sustituye las longitudes de los tres lados en la ecuación dada por el Teorema de Pitágoras usando $a \leq b < c$. Asegúrate de usar el lado más largo para la hipotenusa.

- Si $a^2 + b^2 = c^2$, la figura es un triángulo rectángulo.
- Si $a^2 + b^2 > c^2$, la figura es un triángulo agudo.
- Si $a^2 + b^2 < c^2$, la figura es un triángulo obtuso.

Ejemplo 4

Clasificar el triángulo de abajo como rectángulo, agudo, u obtuso.



Los dos lados más cortos del triángulo son 9 y 11. El lado más largo del triángulo es 14. Primero encuentra la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 9^2 + 11^2 \\ &= 81 + 121 \\ &= 202 \end{aligned}$$

La suma de los cuadrados de los dos lados más cortos es 202. Comparar esto con el cuadrado del lado más largo, 14.

$$14^2 = 196$$

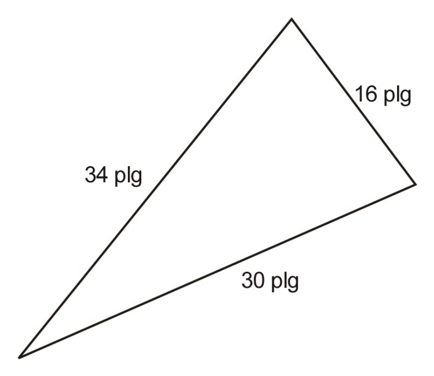
El cuadrado del lado más largo es 196. Por lo tanto, los dos valores no son iguales, $a^2+b^2 \neq c^2$ y este triángulo no es un triángulo rectángulo. Compara los dos valores, a^2+b^2 y c^2 para identificar cual es mayor.

$$202 > 196$$

Ya que la suma del cuadrado de los lados más cortos es mayor que el cuadrado del lado más largo, este es un triángulo agudo.

Ejemplo 5

Clasificar el triángulo de abajo como rectángulo, agudo u obtuso.



Los dos lados más cortos del triángulo son 16 y 30. El lado más largo del triángulo es 34. Primero encuentra la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos.

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 16^2+30^2 \\ &= 256+900 \\ &= 1156 \end{aligned}$$

La suma de los cuadrados de los dos lados es $1,156$. Comparar esto al cuadrado del lado más largo, 34.

$$c^2 = 34^2 = 1156$$

El cuadrado del lado más largo es $1,156$. Ya que estos dos valores son iguales, $a^2+b^2=c^2$, y esto es un triángulo rectángulo.

Resumen de la Lección

En esta lección, exploramos como trabajar con expresiones radicales diferentes, ambas en teoría y situaciones practicas. Específicamente, hemos aprendido:

- Como usar el inverso del Teorema de Pitágoras para probar que un triángulo es rectángulo.
- Como identificar triángulos agudos a partir de las medidas de los lados.
- Como identificar triángulos obtusos a partir de las medidas de los lados.
- Como clasificar triángulos en formas diferentes.

Estas habilidades te ayudarán a resolver diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas de aplicar el Teorema de Pitágoras y su inverso a situaciones matemáticas.

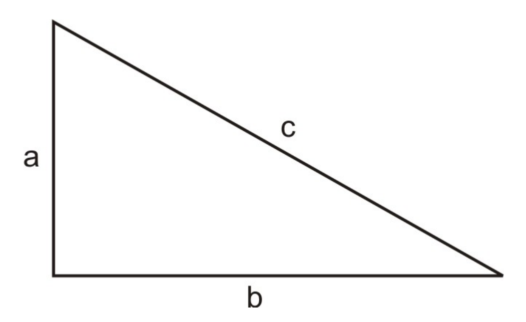
Puntos a considerar

Usar el Teorema de Pitágoras para explorar las relaciones en triángulos rectángulos comunes. Encuentras que los lados son proporcionados?

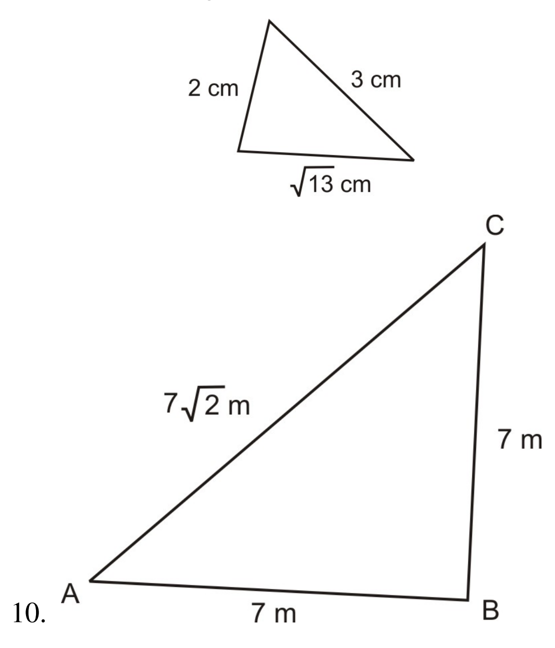
Ejercicios de repaso

Resolver cada problema.

Para los ejercicios del 1-8, clasificar el siguiente triángulo como agudo, obtuso, o recto basado en la longitud de los lados dados. Nota que, la figura no está a escala.



1. $a = 9$ pulg, $b = 12$ pulg, $c = 15$ pulg
2. $a = 7$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8$ cm
3. $a = 4$ m, $b = 8$ m, $c = 10$ m
4. $a = 10$ pies, $b = 22$ ft, $c = 23$ pies
5. $a = 21$ cm, $b = 28$ cm, $c = 35$ cm
6. $a = 10$ pies, $b = 12$ pies, $c = 14$ pies
7. $a = 15$ m, $b = 18$ m, $c = 30$ m
8. $a = 5$ pulg, $b = \sqrt{75}$ pulg, $c = 110$ pulg
9. En el triángulo de abajo, que lados deberías usar para los catetos (usualmente llamados a ,y b) y la hipotenusa (usualmente llamada c), en el Teorema de Pitágoras? Cómo sabes?



10.

a. $m\angle A =$
b. $m\angle B =$

Respuestas

1. Rectángulo
2. Agudo
3. Obtuso
4. Agudo
5. Rectángulo
6. Agudo
7. Obtuso
8. Obtuso
9. El lado con longitud $\sqrt{13}$ debería ser la hipotenusa ya que es el lado más largo. El orden de los catetos no importa
10. $m\angle A = 45^\circ, m\angle B = 90^\circ$

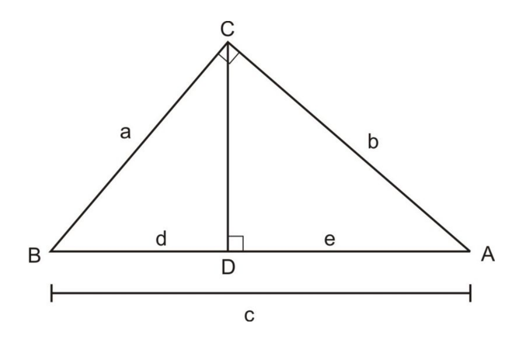
1.3 Usando triángulos rectángulos semejantes

Objetivos de aprendizaje

- Identificar triángulos semejantes inscritos en un triángulo semejante grande.
- Evaluar la media geométrica de varios objetos.
- Identificar la longitud de una altitud usando la media geométrica de una hipotenusa separada.
- Identificar la longitud de un cateto usando la media geométrica y la longitud de un cateto usando la media geométrica de una hipotenusa separada.

Introducción

En esta lección, estudiarás figuras **inscritas,** o dibujadas en triángulos existentes. Uno de los tipos de líneas más importantes dibujadas en un triángulo rectángulo es llamada **altitud.** Recuerda que la altitud de un triángulo es la distancia perpendicular desde un vértice al lado opuesto. Por definición cada cateto de un triángulo rectángulo es una altitud. Podemos encontrar una altitud más en un triángulo rectángulo sumando un segmento de línea auxiliar que conecte el vértice de un ángulo recto con la hipotenusa, formando un nuevo ángulo recto.



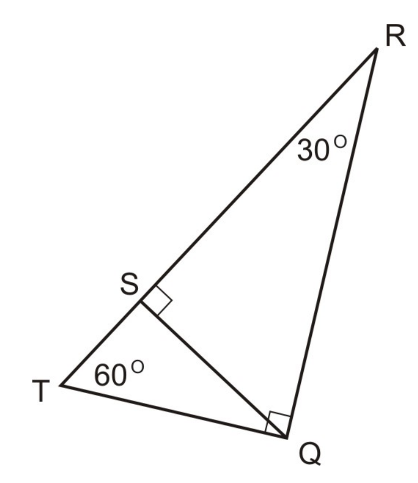
Podrías recordar que esta es la figura que usamos para probar el Teorema de Pitágoras. En el triángulo rectángulo ABC de arriba, el segmento $\overline{CD}$ es una altitud. Comienza en el ángulo C, el cuál es un ángulo recto, y es perpendicular a la hipotenusa $\overline{AB}$. En la figura resultante, tenemos tres triángulos rectángulos, y todos ellos son semejantes.

Triángulos semejantes inscritos

Tú podrías recordar que si dos objetos son semejantes, ángulos correspondientes son congruentes y sus lados son proporcionales en longitud. En otras palabras, figuras semejantes tienen la misma forma, pero de diferentes tamaños. Para probar que dos triángulos son semejantes, es suficiente probar que todas las medidas de los ángulos son congruentes (nota, esto NO es verdadero para otros polígonos. Por ejemplo, ambos cuadrados y rectángulos “largos” tienen todos ángulos de 90° , pero no son semejantes). Usa la lógica, y la información presentada arriba para completar el Ejemplo 1.

Ejemplo 1

Justificar el enunciado que $\triangle TQR \sim \triangle TSQ \sim \triangle QSR$.



En la figura de arriba, el triángulo más grande $\triangle TQR$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle Q$ y $m\angle R = 30^\circ$ y $m\angle T = 60^\circ$. Entonces, si $\triangle TQR, \triangle TSQ$, y $\triangle QSR$ son semejantes, tendrán todos ángulos de $30^\circ, 60^\circ$, y 90°.

Primero observa a $\triangle TSQ$. $m\angle QST = 90^\circ$, y $m\angle T = 60^\circ$. Ya que la suma de los tres ángulos en un triángulo siempre es igual a 180°,el ángulo faltante, $\angle TQS$, debe medir 30°, ya que $30+60+90 = 180$. Alineando los ángulos congruentes, podemos escribir $\triangle TQR \sim \triangle TSQ$.

Ahora observa a $\triangle QRS.\angle QSR$ tiene una medida de 90°, y $m\angle R = 30^\circ$. Ya que la suma de los tres ángulos en un triángulo siempre es igual a 180°, el ángulo faltante, $\angle RQS$, debe medir 60°, ya que $30+60+90 = 180$. Ahora, ya que los triángulos tienen ángulos correspondientes congruentes, $\triangle QSR$ y $\triangle TQR$ son semejantes.

En consecuencia, $\triangle TQR \sim \triangle TSQ \sim \triangle QSR$. Sus ángulos son congruentes y sus lados son proporcionales.

Nota que tú debes ser muy cuidadoso en agrupar ángulos correspondientes cuando escribes enunciados de semejanzas de triángulos. Aquí deberíamos escribir $\triangle TQR \sim \triangle TSQ \sim \triangle QSR$. Este ejemplo es un reto porque los triángulos están traslapados.

Medias geométricas

Cuando alguien te pide encontrar el promedio de dos números, probablemente piensas en la media aritmética (promedio). Las oportunidades son buenas pues has trabajado con medias aritméticas por muchos años, pero el concepto de una **media geométrica** puede ser nuevo . Una media geométrica se encuentra dividiendo la suma de un conjunto de números por el número de elementos en el conjunto. Las medias geométricas son usadas para calcular notas totales y muchas otras aplicaciones. La gran idea detrás de la media aritmética es encontrar una “medida de centro” para un grupo de números.

Una media geométrica aplica los mismos principios, pero relacionados específicamente a tamaño, longitud, o medida. Por ejemplo, puedes tener dos segmentos de líneas como se muestra abajo. En vez de sumar o dividir, encuentras una media geométrica multiplicando los dos números, luego encontrando la raíz cuadrada del producto.

2 cm
A B

8 cm
C D

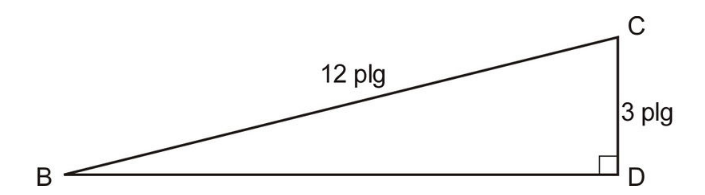
Para encontrar la media geométrica de estos dos segmentos, multiplica las longitudes y encuentra la raíz cuadrada del producto.

$$\begin{aligned} \text{media} &= \sqrt{8 \cdot 2} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Así que, la media geométrica de los dos segmentos sería el segmento de una línea de 4 cm de longitud. Usa estos conceptos y estrategias para completar el ejemplo 2.

Ejemplo 2

En $\triangle BCD$ de abajo, cuál es la media geométrica de BC y CD?



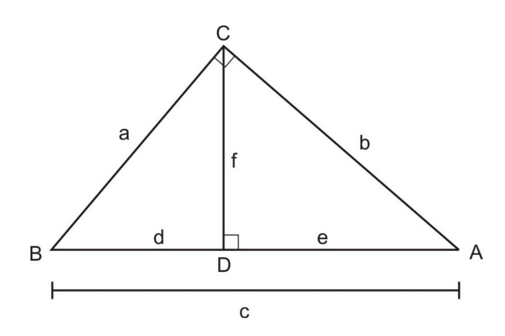
Cuando encuentras una media geométrica, primero encuentras el producto de los elementos involucrados. En este caso, el segmento BC es 12 pulgadas y el segmento CD es 3 pulgadas. Luego encuentras la raíz cuadrada de este producto.

$$\begin{aligned} \text{media} &= \sqrt{12 \cdot 3} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Entonces, la media geométrica de BC y CD en $\triangle BCD$ es 6 pulgadas.

Altitud como media geométrica

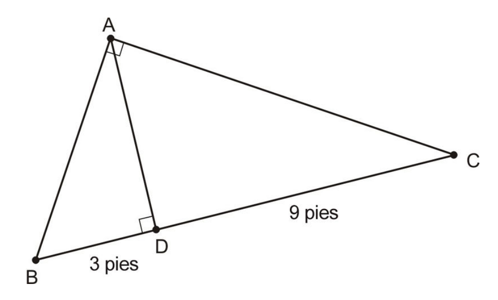
En un triángulo rectángulo, la longitud de la altitud desde el ángulo recto a la hipotenusa es la media geométrica de las longitudes de los dos segmentos de la hipotenusa. En el diagrama de abajo podemos usar $\triangle BDC \sim \triangle CDA$ para crear la proporción $\frac{d}{f} = \frac{f}{e}$. Resolviendo para $f, f = \sqrt{d \cdot e}$.



Puedes usar esta relación para encontrar la longitud de la altitud si conoces la longitud de los dos segmentos de la hipotenusa dividida.

Ejemplo 3

Cuál es la longitud de la altitud $\overline{AD}$ *en el triángulo de abajo?*



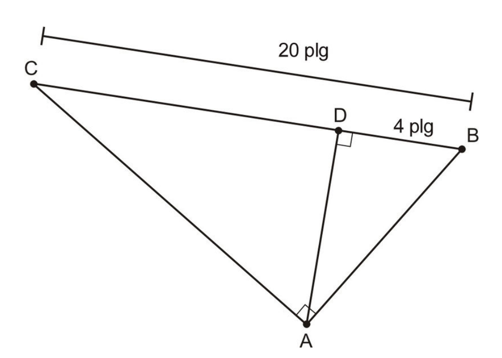
Para encontrar la altitud de este triángulo, encuentra la media geométrica de los dos segmentos de la hipotenusa. En este caso, necesitas encontrar la media geométrica de 9 y 3. Para encontrar la media geométrica, encuentra el producto de los dos números y luego toma su raíz cuadrada.

$$\begin{aligned} \text{mean} &= \sqrt{9 \cdot 3} \\ &= \sqrt{27} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Así que $AD = 3\sqrt{3}$ pies, o aproximadamente $3(1.732) = 5.2$ pies.

Ejemplo 4

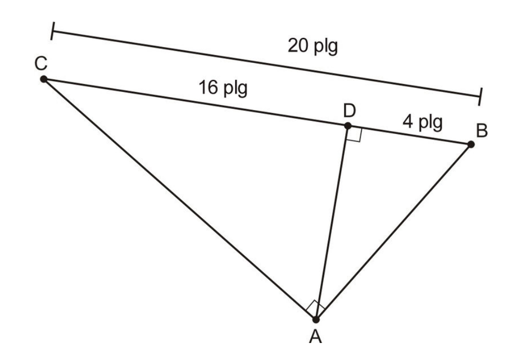
Cual es la longitud de la altitud en el triángulo de abajo?



La altitud de este triángulo es $\overline{AD}$. Recuerda que la altitud no siempre va "abajo"! Para encontrar AD, encuentra la media geométrica de los dos segmentos de la hipotenusa. Asegúrate que completarás la información faltante en el diagrama. Conoces que toda la hipotenusa, $\overline{CB}$ tiene 20 pulgadas de largo y $BD = 4$ pulgadas, pero necesitas saber CD, la longitud de la subsección más larga de $\overline{CB}$, para encontrar la media geométrica. Para hacer esto, sustrae:

$$\begin{aligned} CD &= CB - DB \\ &= 20 - 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Así que $CD = 16$ pulgadas. Escribir esta medida en el diagrama para guardar un historial de tu trabajo.



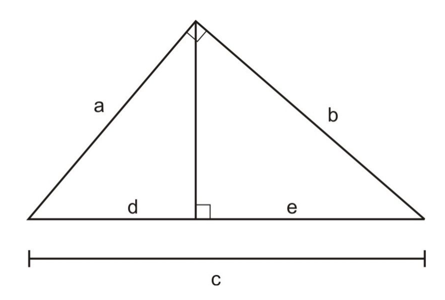
Ahora encuentra la media geométrica de 16 y 4 para identificar la longitud de la altitud.

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{16 \cdot 4} \\ &= \sqrt{64} \\ &= 8 \end{aligned}$$

La altitud del triángulo medirá 8 pulgadas.

Cateto como media geométrica

Así como usamos triángulos semejantes para crear una proporción usando la altitud, las longitudes de los catetos en los triángulos rectángulos también pueden ser encontradas con una media geométrica con respecto a la hipotenusa. La longitud de un cateto en un triángulo rectángulo es la media geométrica del segmento adyacente y toda la hipotenusa entera.

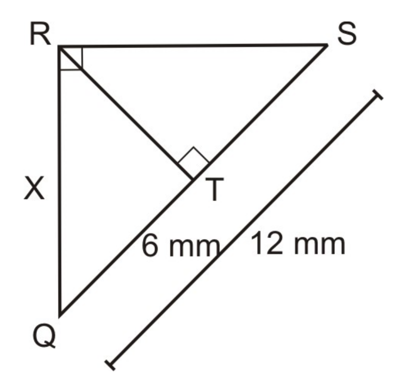


$$\begin{aligned} a &= \sqrt{d \cdot c} \\ b &= \sqrt{e \cdot c} \end{aligned}$$

You can use this relationship to find the length of the leg if you know the length of the two segments of the divided hypotenuse.

Example 5

What is the length of x in the triangle below?



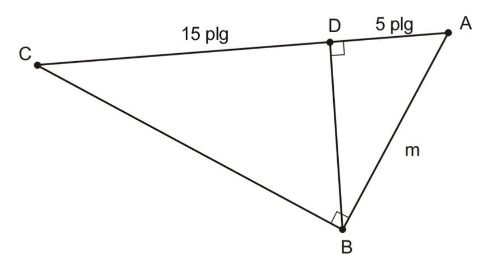
To find x, the leg of the large right triangle, find the geometric mean of the adjacent segments of the hypotenuse and the entire hypotenuse. In this case, you need to find the geometric mean of 6 and 12. To find the geometric mean, find the product of the two numbers and then take the square root of that product.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{6 \cdot 12} \\ &= \sqrt{72} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

So, $x = 6\sqrt{2}$ millimeters or approximately 8.49 millimeters.

Example 6

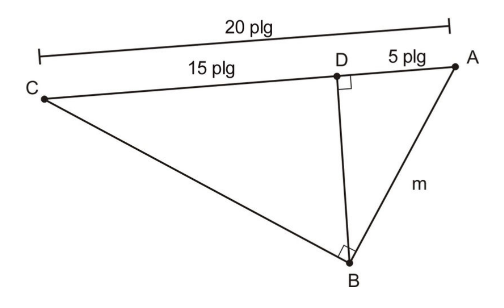
If $m = AB$, what is the value m in the triangle below?



To find m in this triangle, find the geometric mean of the adjacent segment of the hypotenuse and the entire hypotenuse. Make sure that you fill in missing information in the diagram. You know that the two shorter sections of the hypotenuse are 15 inches and 5 inches, but you need to know the length of the entire hypotenuse to find the geometric mean. To do this, add.

$$\begin{aligned} AD + DC &= AC \\ 5 + 15 &= 20 \end{aligned}$$

So, $AC = 20$ inches. Write this measurement on the diagram to keep track of your work.



Now find the geometric mean of 20 and 5 to identify the length of the altitude.

$$m = \sqrt{20 \cdot 5}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

So, $m = 10$ inches.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes radicales, tanto en teoría como en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Cómo identificar triángulos semejantes inscritos en un triángulo más grande.
- Cómo evaluar la media geométrica de varios objetos.
- Cómo identificar la longitud de una altitud usando la media geométrica de una hipotenusa separada.
- Cómo identificar la longitud de un cateto usando la media geométrica de una hipotenusa separada.

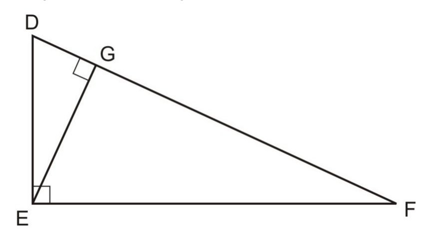
Estas habilidades te ayudarán a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas para encontrar relaciones entre lados y ángulos en triángulos.

Puntos a considerar

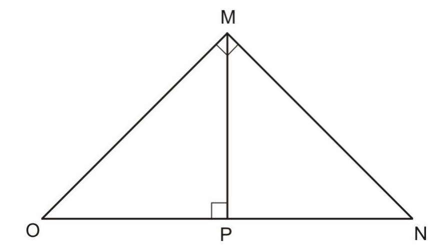
Cómo puedes usar el Teorema de Pitágoras para identificar otras relaciones entre los lados en triángulos?

Ejercicios de repaso

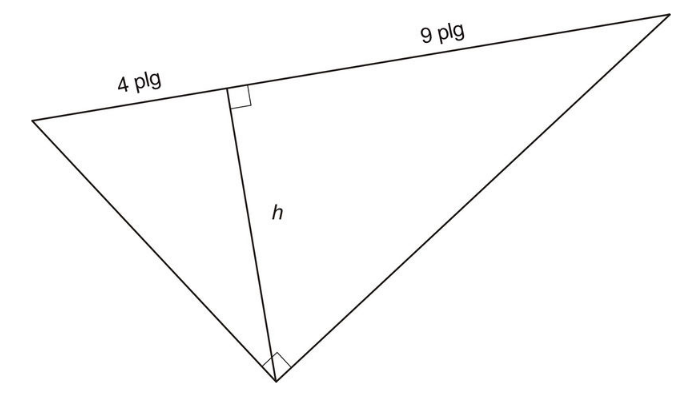
1. Cuáles triángulos en el diagrama de abajo son semejantes?



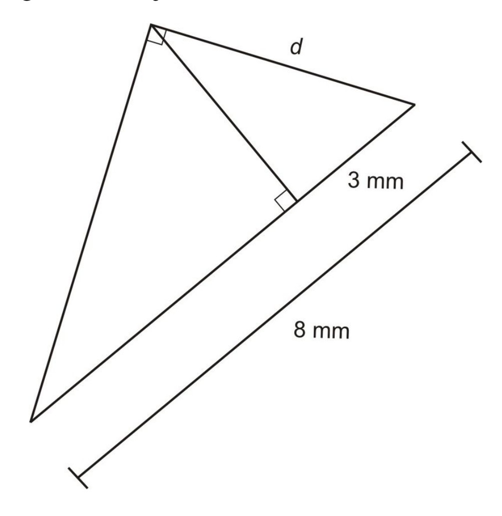
2. Cuál es la media geométrica de dos segmentos de línea que tienen 1 y 4 pulgadas, respectively?
3. Cuál es la media geométrica de dos segmentos de líneas que tienen 3 cm cada uno?
4. Qué triángulos en el diagrama de abajo son semejantes?



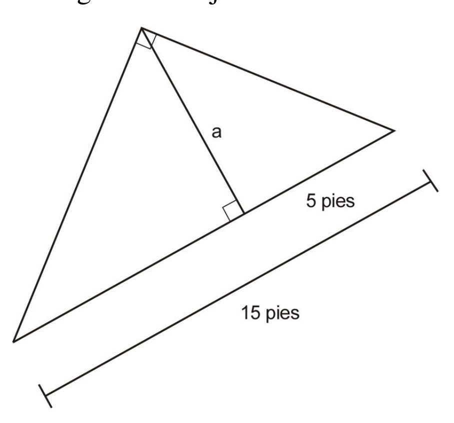
5. Cuál es la longitud de la altitud, h, en el triángulo de abajo?



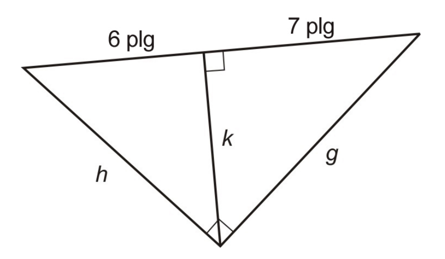
6. Cuál es la longitud de d en el triángulo de abajo?



7. Cuál es la media geométrica de dos segmentos de líneas que tienen 4 yardas y 8 yardas, respectivamente?
8. Cuál es la longitud de la altitud en el triángulo de abajo?

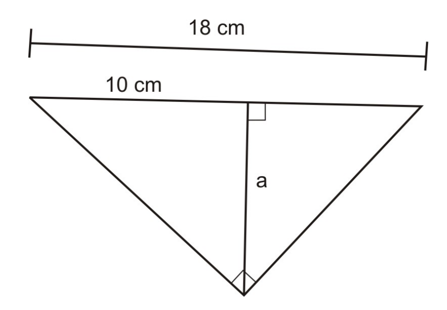


Usar el siguiente diagrama para los ejercicios 9-11:



9. $g =$ ____

10. $h =$ ____
11. $k =$ ____ (para un reto extra, encontrar k en dos formas diferentes)
12. Cuál es la longitud de la altitud en el triángulo de abajo?



Respuestas

1. Triángulos DEF, EGF, y DGE son todos semejantes
2. 2 pulgadas
3. 3 cm
4. Triángulos MNO, PNM, y PMO son todos semejantes.
5. 6 pulgadas
6. $2\sqrt{6}$ mm, o aproximadamente 4.9 mm
7. $4\sqrt{2}$ yardas, o aproximadamente 5.66 yardas
8. $5\sqrt{2}$ pies, o aproximadamente 7.07 pies
9. $g = \sqrt{91}$ pulgadas, o aproximadamente 9.54 pulgadas
10. $h = \sqrt{78}$ pulgadas o aproximadamente 8.83 pulgadas
11. $k = \sqrt{42}$ pulgadas o aproximadamente 6.48 pulgadas. Una forma de encontrar k es con la media geométrica: $k = \sqrt{6.7} = \sqrt{42}$ pulgadas. Alternativamente, usando la respuesta del ejercicio 9 y uno de los pequeños triángulos rectángulos, $k = \sqrt{(\sqrt{91})^2 - (7)^2} = \sqrt{91-49} = \sqrt{42}$ pulgadas
12. .

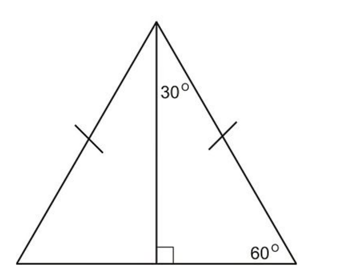
1.4 Triángulos Rectángulos especiales

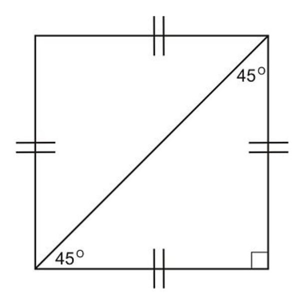
Objetivos de aprendizaje

- Identificar y usar las proporciones involucrados con los triángulos Isósceles rectángulos.
- Identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.
- Identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos equiláteros.
- Emplear proporciones de triángulos rectángulos cuando se resuelven problemas del mundo real.

Introducción

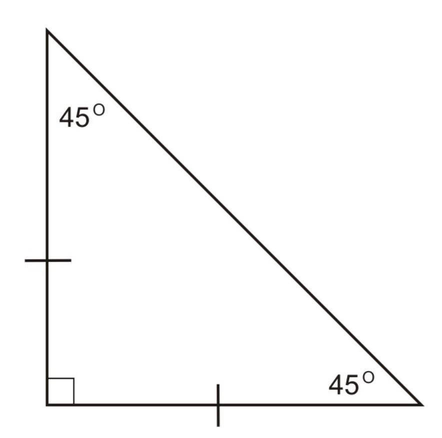
Qué pasa cuando cortas un triángulo equilátero por la mitad usando una altitud? Tú obtienes dos triángulos rectángulos. Que hay del cuadrado? Si dibujas una diagonal a través de un cuadrado también obtienes dos triángulos rectángulos. Estos dos triángulos rectángulos son *triángulos rectángulos especiales* llamados los triángulos rectángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ y el $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$. Ellos tienen propiedades únicas y si tú entiendes las relaciones entre los lados y ángulos en estos triángulos, lo harás bien en geometría, trigonometría , y más allá.





Triángulos Isósceles Rectángulos

El primer tipo de triángulo rectángulo a examinar es el **isósceles.** Como sabes, los triángulos Isósceles tienen dos lados que tienen la misma longitud. Adicionalmente, los ángulos base de un triángulo isósceles son congruentes también. Un triángulo isósceles **rectángulo** tendrá siempre ángulos bases que miden cada uno 45° y un ángulo en el vértice que mide 90°.

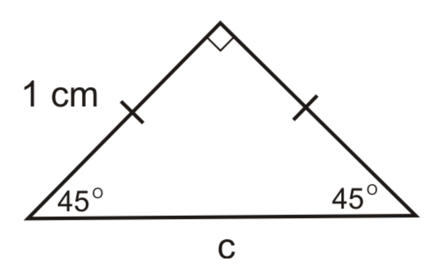


No olvides que los ángulos base son los ángulos formados desde los lados congruentes. Ellos no tienen que estar en el fondo de la figura.

Debido a que los ángulos de todos los triángulos serán $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ por definición, permanecen iguales, todos los triángulos $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ son **semejantes,** entonces sus lados serán siempre proporcionales. Para encontrar la relación entre los lados, usar el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1

El triángulo Isósceles rectángulo de abajo tiene lados que miden 1 centmetro.



Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de la hipotenusa.

Ya que los lados tienen 1 centmetro cada uno, sustituir 1 para ambos a y b, y resolver para c:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= c^2 \\
1^2 + 1^2 &= c^2 \\
1 + 1 &= c^2 \\
2 &= c^2 \\
\sqrt{2} &= \sqrt{c^2} \\
c &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

En este ejemplo $c = \sqrt{2}$ cm.

Qué pasa si cada lado en el ejemplo de arriba fuera 5 cm? Entonces tendríamos

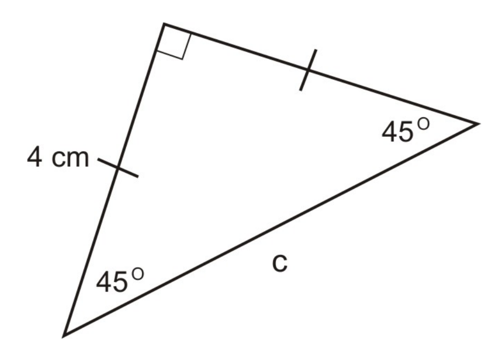
$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= c^2 \\
5^2 + 5^2 &= c^2 \\
25 + 25 &= c^2 \\
50 &= c^2 \\
\sqrt{50} &= \sqrt{c^2} \\
c &= 5\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Si cada lado tiene 5 cm, entonces la hipotenusa es $5\sqrt{2}$ cm.

Cuando la longitud de cada lado era 1, la hipotenusa era $1\sqrt{2}$. Cuando la longitud de cada lado era 5, la hipotenusa era $5\sqrt{2}$. Es esta una coincidencia? No. Recuerda que los lados de todos los triángulos $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ son proporcionales. La hipotenusa de un triángulo Isósceles rectángulo será siempre igual al producto de la longitud de un lado y $\sqrt{2}$. Usar esta información para resolver el problema en el ejemplo 2.

Ejemplo 2

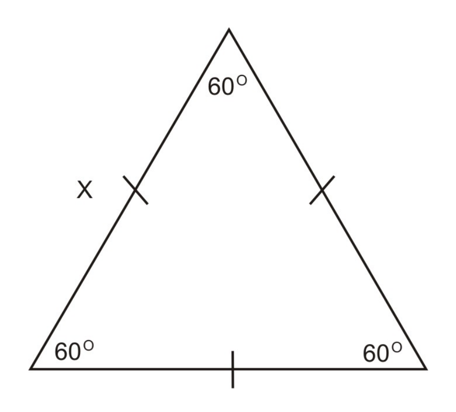
Cual es la longitud de la hipotenusa en el triángulo de abajo?



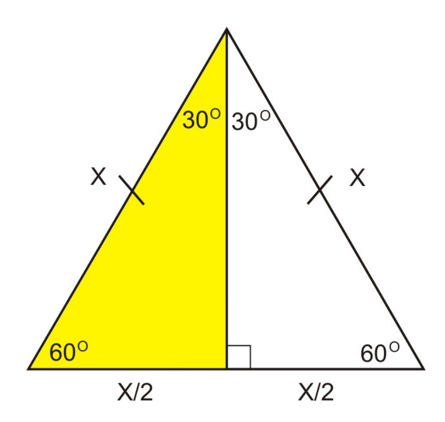
Ya que la longitud de la hipotenusa es el producto de un lado y $\sqrt{2}$, puedes fácilmente calcular esta longitud. Un lado tiene 4 pulgadas, entonces la hipotenusa será $4\sqrt{2}$ pulgads, o alrededor de 5.66 pulgadas.

Triángulos Equiláteros

Recuerda que un triángulo equilátero tiene todos sus lados con la misma longitud. Los triángulos equiláteros son también equiangulares—todos los ángulos tienen la misma medida. En un triángulo equilátero, todos los ángulos miden exactamente 60°.



Nota lo que pasa cuando divides un triángulo equilátero por la mitad.



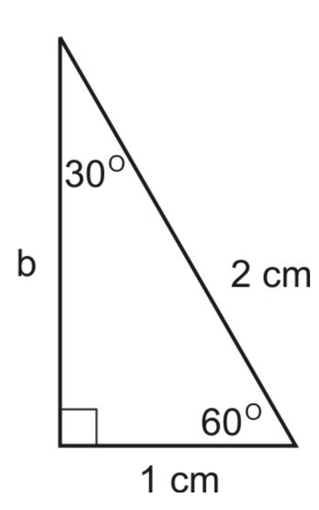
Cuando un triángulo equilátero está dividido en dos partes iguales usando una altitud, cada triángulo rectángulo resultante es un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. La hipotenusa del triángulo resultante era el lado del triángulo original, y el lado más corto es la mitad de un lado original. Esto es porque la hipotenusa es siempre el doble de la longitud del lado más corto en un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Puedes usar esta información para resolver problemas sobre triángulos equiláteros .

Triángulos 30º-60º-90º

Otro tipo importante de triángulo rectángulo tiene ángulos que miden 30°, 60°, y 90°. Justo como encontraste una proporción constante entre los lados de un triángulo Isósceles rectángulo, puedes encontrar proporciones constantes aquí también. Usa el Teorema de Pitágoras para descubrir estas relaciones importantes.

Ejemplo 3

Encontrar la longitud del lado faltante en el siguiente triángulo. Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar tu respuesta.



Como lo hiciste para los triángulos $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$, usa el Teorema de Pitágoras para encontrar el lado faltante. En este diagrama, se te ha dado dos medidas: la hipotenusa (c) tiene 2 cm y el lado más corto (a) tiene 1 cm. Encontrar la longitud del lado faltante (b).

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=c^2\\ 1^2+b^2&=2^2\\ 1+b^2&=4\\ b^2&=3\\ b&=\sqrt{3} \end{aligned}$$

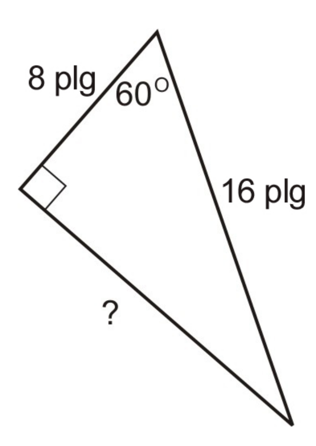
Tú puedes dejar la respuesta en forma de radical como se muestra, o usar tu calculadora para encontrar el valor aproximado de $b \approx 1.732$ cm.

Por tu cuenta, trata esto de nuevo usando una hipotenusa de 6 pies. Recuerda, ya que el triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ procede de un triángulo equilátero, tú sabes que la longitud del lado más corto es la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Ahora deberías estar listo para identificar las proporciones constantes en triángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. La hipotenusa siempre será el **doble** de la longitud del lado más corto, y el lado más largo es siempre el producto de la longitud del lado más corto y $\sqrt{3}$. En forma proporcional, los lados, en orden del más corto al más largo están en la proporción $x : x\sqrt{3} : 2x$.

Ejemplo 4

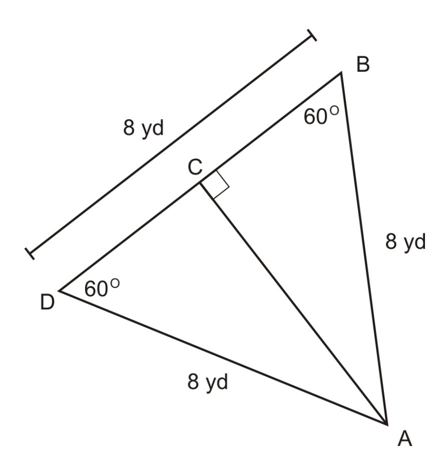
Cual es la longitud del lado faltante en el triángulo de abajo?



Ya que la longitud del lado más grande es el producto del lado más corto y $\sqrt{3}$, puedes fácilmente calcular esta longitud. El lado más corto tiene 8 pulgadas, entonces el lado más largo tendrá $8\sqrt{3}$ pulgadas, o aproximadamente 13.86 pulgadas.

Ejemplo 5

Cuál es la longitud AC en la figura de abajo?



Para encontrar la longitud del segmento $\overline{AC}$, identifica su relación con el resto del triángulo. Ya que es una altitud, forma dos triángulos congruentes con ángulos que miden 30°, 60°, y 90°. Entonces, AC será el producto de BC (el lado más corto) y $\sqrt{3}$.

$$AC = BC\sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3}$$

$AC = 4\sqrt{3}$ yardas , o aproximadamente 6.93 yardas.

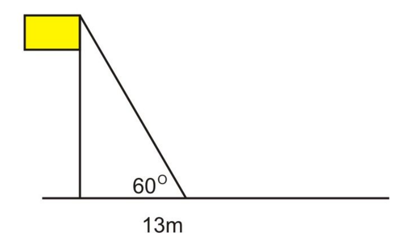
Triángulos Rectángulos especiales en el mundo real

Puedes usar triángulos rectángulos especiales en muchos contextos del mundo real. Muchas aplicaciones de geometría en la vida real se basan en triángulos rectángulos especiales, entonces estar preparado para recordar y usar estas proporciones es una forma de ahorrar tiempo cuando se resuelven problemas.

Ejemplo 6

El diagrama de abajo muestra la sombra de una asta de bandera emite a determinado momento del día.





Si la longitud de la sombra emitida por el asta es de 13 m*, cual es la altura del asta de la bandera y la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo mostrado?*

La redacción de este problema es complicada, pero solamente necesitas notar unas cuantas cosas. Puedes decir por la ilustración que este triángulo tiene ángulos de $30°, 60°$, y $90°$ (Esto asume que el asta de la bandera es perpendicular

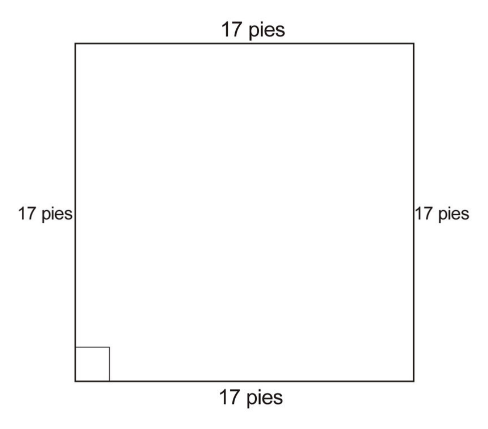
al suelo, pero es una suposición segura). La altura del asta de la bandera es el cateto más largo en el triángulo, entonces usa las proporciones de triángulos rectángulos especiales para encontrar la longitud de la hipotenusa.

El lado más largo es el producto del lado más corto y $\sqrt{3}$. la longitud del lado más corto está dada como 13 metros, entonces la altura del asta de la bandera es $13\sqrt{3}$ m.

La longitud de la hipotenusa es la hipotenusa de un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Será siempre el doble de la longitud del lado más corto, entonces será igual a $13 \cdot 2$, o 26 metros.

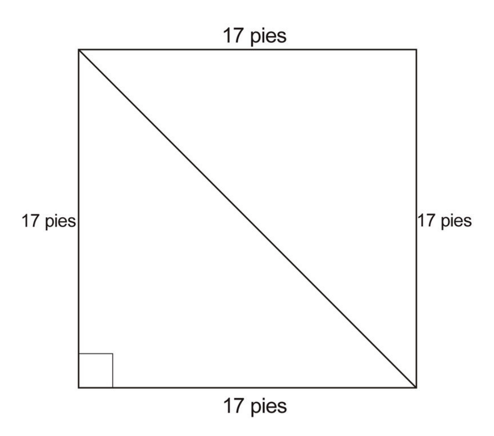
Ejemplo 7

Antonio construyó un patio cuadrado en su jardín trasero.



El desea colocar una tubería con agua para las flores que vaya desde una esquina a la otra , diagonalmente. Que tan larga será la tubería?

El primer paso en un problema verbal de esta naturaleza es agregar información importante al dibujo. Porque el problema te pide encontrar la longitud desde una esquina a la otra, deberías dibujar ese segmento.



Una vez que has dibujado la trayectoria diagonal, puedes ver como los triángulos te ayudan a contestar esta pregunta. Porque ambos lados del triángulo tienen la misma medida (17 pies), este es un triángulo Isósceles rectángulo. Los ángulos en un triángulo Isósceles rectángulo son $45^\circ, 45^\circ$, y 90°.

En un triángulo Isósceles rectángulo, la hipotenusa es siempre igual al producto de la longitud de un lado y $\sqrt{2}$. Entonces, la longitud de la tubería para agua de Antonio será el producto de 17 y $\sqrt{2}$, o $17\sqrt{2} \approx 17(1.414)$ pies. Este valor es aproximadamente igual a 24.04 pies.

Resumen de la lección

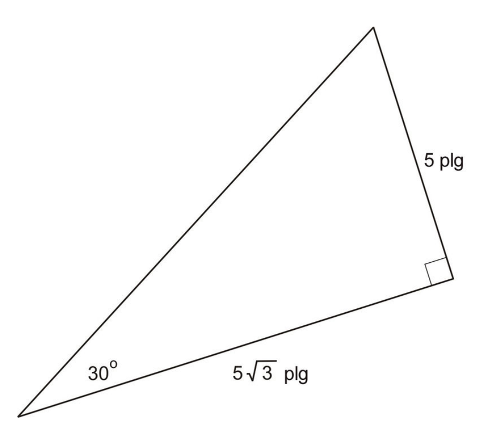
En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes radicales, ambos en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Como identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos Isósceles rectángulos.
- Como identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.
- Como identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos equiláteros .
- Como emplear proporciones de triángulos rectángulos cuando se resuelven problemas del mundo real.

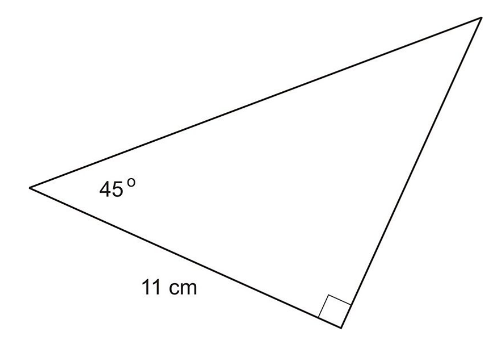
Estas habilidades te ayudarán a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas para encontrar relaciones entre los lados y ángulos en los triángulos.

Ejercicios de repaso

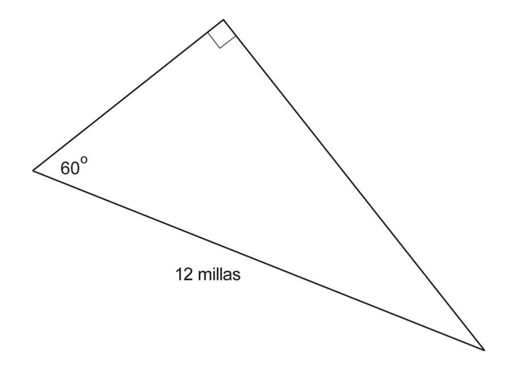
1. Mildred tenía un pedazo de sobrante de madera cortado en forma de triángulo equilátero. Ella quiere cortarlo en dos pequeños triángulos congruentes. Cuál será la medida de los ángulos de los triángulos resultantes?
2. Roberto tiene una pizza cuadrada. El quiere cortar dos triángulos congruentes de la pizza sin dejar sobrantes. Cual será la medida de los ángulos de los triángulos resultantes?
3. Cual es la longitud de la hipotenusa en el triángulo de abajo?



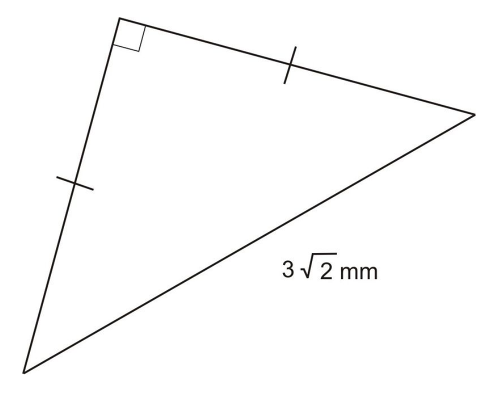
4. Cuál es la longitud de la hipotenusa en el triángulo de abajo?



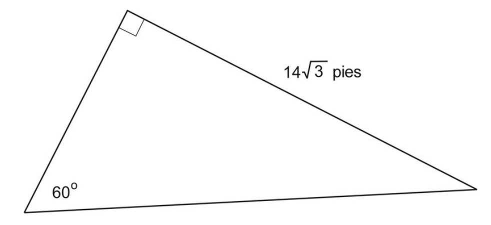
5. Cuál es la longitud del lado más largo en el triángulo de abajo?



6. Cuál es la longitud de uno de los lados en el triángulo de abajo?



7. Cuál es la longitud del lado más corto en el triángulo de abajo?



8. Una ventana cuadrada tiene una diagonal de $5\sqrt{2}$ pies. Cual es la longitud de uno de sus lados?
9. Un bloque cuadrado de espuma es cortado en dos cuñas congruentes . Si un lado del bloque original tenía 3 pies, qué tan larga es la diagonal cortada?
10. Thuy quiere encontrar el área de un triángulo equilátero, pero sólo conoce que la longitud de un lado es 6 pulgadas. Cuál es la altura del triángulo de Thuy? Cuál es el área del triángulo?

Respuestas

1. $30^\circ, 60^\circ$, y 90°
2. $45^\circ, 45^\circ$, y 90°
3. 10
4. $11\sqrt{2}$ cm o aprox. 15.56 cm
5. $6\sqrt{3}$ millas o aprox. 10.39 millas
6. 3 mm
7. 14 pies
8. 5 pies
9. $3\sqrt{2}$ pies o aprox. 4.24 pies
10. $3\sqrt{3}$ pulgadas o aprox. 5.2 pulgadas. El área es $9\sqrt{3} \approx 15.59$ pulgadas^2

1.5 Proporción tangencial

Objetivos de aprendizaje

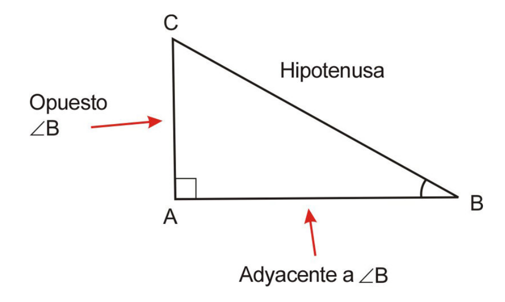
- Identificar las diferentes partes de los triángulos rectángulos.
- Identificar y usar la proporción tangencial en un triángulo rectángulo.
- Identificar ángulos complementarios en triángulos rectángulos.
- Entender la proporción tangencial en triángulos rectángulos especiales.

Introducción

Ahora que estás familiarizado con los triángulos rectángulos, las proporciones que relacionan los lados, así como también otras aplicaciones importantes, es tiempo de aprender sobre proporciones trigonométricas. Las proporciones trigonométricas muestran la relación entre los lados de un triángulo y los ángulos dentro de él. Esta lección se enfoca en la proporción tangencial.

Partes de un triángulo

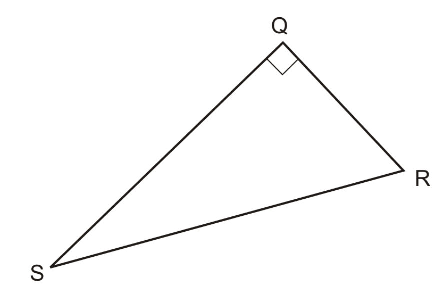
En trigonometría, existen un número de diferentes designaciones atribuidas a diferentes lados de un triángulo rectángulo. Ellas hacen referencia usualmente a un ángulo específico. La hipotenusa de un triángulo es siempre la misma, pero los términos **adyacente** y **opuesto** dependen de cual ángulo haces referencia. Un lado adyacente a un ángulo es el cateto del triángulo que ayuda a formar el ángulo. El lado opuesto a un ángulo es el cateto del triángulo que no ayuda a formar el ángulo.



En el triángulo mostrado arriba, el segmento $\overline{AB}$ es adyacente a $\angle B$, y el segmento $\overline{AC}$ es opuesto a $\angle B$. Similarmente, $\overline{AC}$ es adyacente a $\angle x$, y $\overline{AB}$ es opuesto a $\angle C$. La hipotenusa siempre es $\overline{BC}$.

Ejemplo 1

Examina el triángulo en el diagrama de abajo.



Identifica cual lado es adyacente a $\angle R$, opuesto a $\angle R$, y la hipotenusa.

La primera parte de la pregunta te pide identificar el lado adyacente a $\angle R$. Ya que el lado adyacente es el que ayuda a formar el ángulo, y no es la hipotenusa, debe ser $\overline{QR}$. La siguiente parte de la pregunta te pide identificar el lado opuesto a $\angle R$. Ya que el lado opuesto es el cateto que no ayuda a formar el ángulo, debe ser $\overline{QS}$. La hipotenusa es siempre opuesta al ángulo recto, entonces en este triángulo la hipotenusa es el segmento $\overline{RS}$.

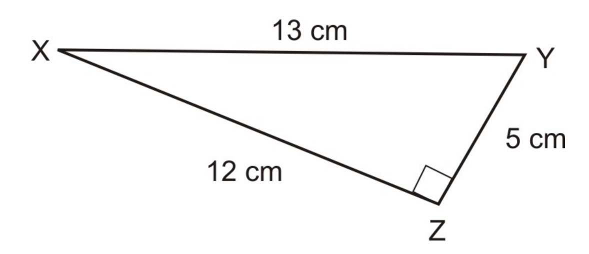
La Proporción tangencial

La primera proporción a examinar cuando se estudian los triángulos rectángulos es la tangencial. La tangente de un ángulo es la proporción de la longitud del lado opuesto con la longitud del lado adyacente. La hipotenusa no está para nada involucrada en la tangente. Debes estar seguro cuando encuentras una tangente, que encuentras los lados opuesto y adyacente *relativo al ángulo en cuestión.*

Para un ángulo obtuso que mide x, definimos $\tan x = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$.

Ejemplo 2

Cuáles son las tangentes de $\angle X$ y $\angle Y$ en el triángulo de abajo?



Para encontrar estas proporciones, primero identifica los lados opuesto y adyacente a cada ángulo.

$$\tan \angle X = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{5}{12} \approx 0.417$$
$$\tan \angle Y = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{12}{5} = 2.4$$

Entonces, la tangente de $\angle X$ es aproximadamente 0.417 y la tangente de $\angle Y$ es 2.4.

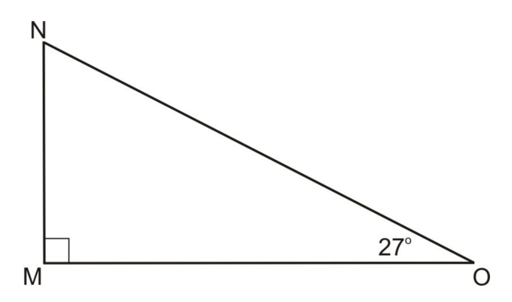
Es común escribir $\tan X$ en lugar de $\tan \angle X$. En este texto usaremos ambas notaciones.

Angulos complementarios en triángulos rectángulos

Recuerda que en todos los triángulos, la suma de todos los ángulos deben ser 180°. Ya que un ángulo recto tiene una medida de 90°, los dos ángulos restantes en un triángulo rectángulo deben ser **complementarios**. Angulos complementarios tienen una suma de 90°. Esto implica que si conoces la medida de uno de los ángulos más pequeños en un triángulo, puedes fácilmente encontrar la medida del otro. Sustrae el ángulo conocido de 90° y tendrás la medida del otro ángulo.

Ejemplo 3

Cuál es la medida de $\angle N$ *en el triángulo de abajo?*



Para encontrar $m\angle N$, puedes sustraer la medida de $\angle N$ de 90°.

$$\begin{aligned} m\angle N + m\angle O &= 90 \\ m\angle N &= 90 - m\angle O \\ m\angle N &= 90 - 27 \\ m\angle N &= 63 \end{aligned}$$

Entonces, la medida de $\angle N$ es 63° ya que $\angle N$ y $\angle O$ son complementarios.

Tangentes de triángulos Rectángulos especiales

Te podría ayudar el que aprendas algunos de los valores más comunes para proporciones tangenciales. La tabla de abajo te muestra los valores para ángulos en triángulos rectángulos especiales.

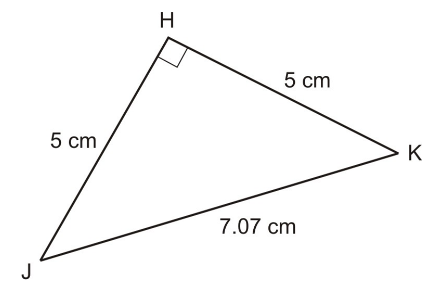
TABLE 1.2:

	30°	45°	60°
Tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{1} \approx 1.732$

Nota que puedes obtener estas proporciones del triángulo rectángulo especial $30° - 60° - 90°$. Puedes usar estas proporciones para identificar ángulos en un triángulo. Trabaja en reversa desde la proporción. Si la proporción es igual a uno de estos valores, puedes identificar la medida del ángulo.

Ejemplo 4

Cuál es $m\angle J$ *en el triángulos de abajo?*



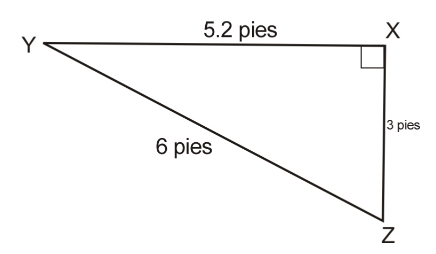
Encuentra la tangente de $\angle J$ y compáralo con los valores en la tabla mostrada arriba.

$$\tan J = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} \\ = \frac{5}{5} \\ = 1$$

Entonces, la tangente de $\angle J$ es 1. Si observas en la tabla, puedes ver que un ángulo que mide 45° tiene una tangente de 1. Entonces, $m\angle J = 45^\circ$.

Ejemplo 5

Cual es $m\angle Z$ en el triángulo de abajo?



Encontrar la tangente de $\angle Z$ y compararla con los valores en la tabla de arriba.

$$\tan Z = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} \\ = \frac{5.2}{3} \\ = 1.7\overline{3}$$

Entonces, la tangente de $\angle Z$ es aproximadamente 1.73. Si observas en la tabla, puedes ver que un ángulo que mide 60° tiene una tangente de 1.732. Entonces, $m\angle z \approx 60^\circ$.

Nota en este ejemplo que $\triangle XYZ$ es un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Puedes usar este hecho para ver que $XY = 5.2 \approx 3\sqrt{3}$.

Resumen de la lección

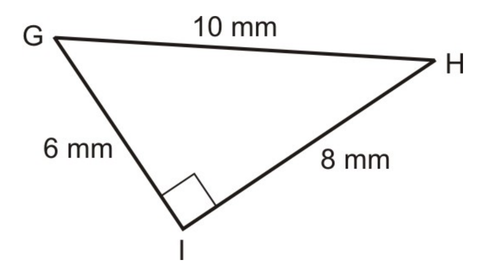
En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes expresiones radicales, ambas en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Cómo identificar las diferentes partes de los triángulos rectángulos.
- Cómo identificar y usar la proporción tangencial en un triángulo rectángulo.
- Cómo identificar ángulos complementarios en triángulos rectángulos.
- Cómo entender proporciones tangenciales en triángulos rectángulos especiales.

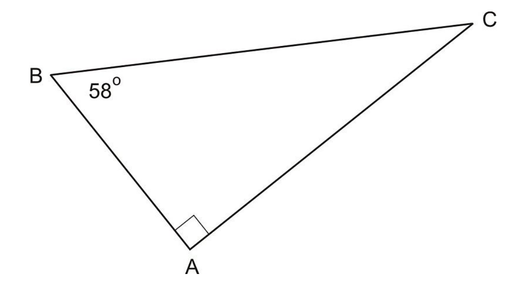
Estas habilidades te ayudarán a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas para encontrar relaciones entre los lados y ángulos en triángulos.

Ejercicios de repaso

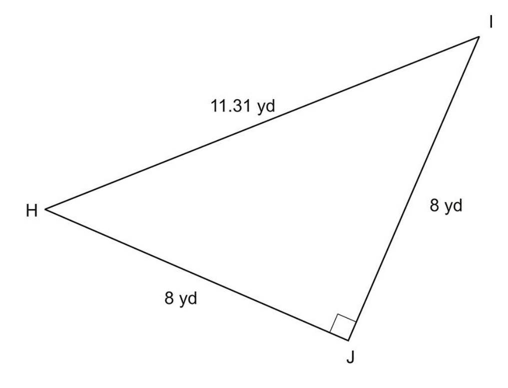
Usa el siguiente diagrama para los ejercicios del 1-5.



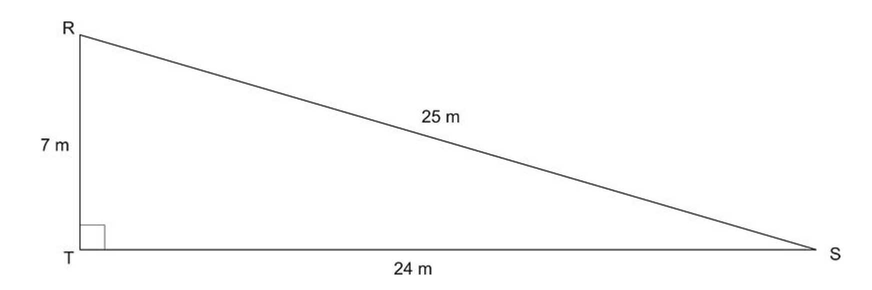
1. Qué tan largo es el lado opuesto al ángulo G?
2. Qué tan largo es el lado adyacente al ángulo G?
3. Qué tan larga es la hipotenusa?
4. Cuál es la tangente de $\angle G$?
5. Cuál es la tangente de $\angle H$?
6. Cuál es la medida de $\angle C$ en el diagrama de abajo?



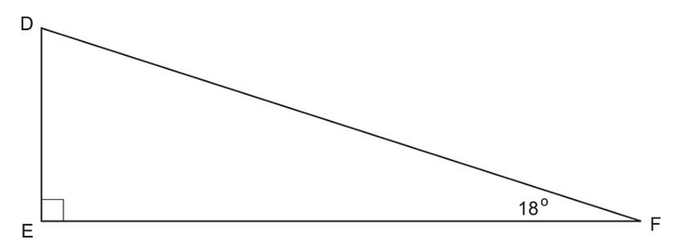
7. Cuál es la medida de $\angle H$ en el diagrama de abajo?



Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 8-9.



8. Cuál es la tangente de $\angle R$?
9. Cuál es la tangente de $\angle S$?
10. Cuál es la medida de $\angle E$ en el triángulo de abajo?



Respuestas

1. 8 mm
2. 6 mm
3. 10 mm
4. $\frac{8}{6} = 1.\overline{3}$
5. $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$
6. 32°
7. 45°
8. $\frac{7}{24} = 0.292$
9. $\frac{24}{7} = 3.43$
10. 72°

1.6 Proporciones de Senos y Cosenos

Objetivos de Aprendizaje

- Revisar las diferentes partes de los triángulos rectángulos.
- Identificar y usar la proporción de seno en un triángulo rectángulo.
- Identificar y usar la proporción de coseno en un triángulo rectángulo.
- Entender las proporciones de seno y coseno en triángulos rectángulos especiales.

Introducción

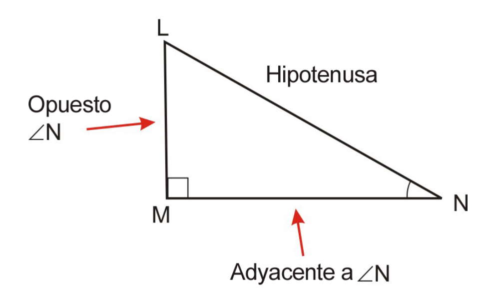
Ahora que tienes alguna experiencia con proporciones tangenciales en triángulos rectángulos, existen otros dos tipos básicos de proporciones trigonométricas a explorar. El **seno** y **coseno** relacionan los lados opuesto y adyacente de un triángulo con la hipotenusa. Usando estas tres proporciones y una calculadora o una tabla de proporciones trigonométricas, puedes resolver una amplia variedad de problemas!

Repaso: Partes de un triángulo

Las proporciones de seno y coseno relacionan los lados opuesto y adyacente con la hipotenusa. Tú ya aprendiste estos términos en la lección anterior, pero son importantes para repasar y aprender de memoria. La hipotenusa de un triángulo es siempre opuesta al ángulo recto, pero los términos adyacente y opuesto dependen del ángulo al que haces referencia. El lado adyacente al ángulo es el cateto del triángulo que ayuda a formar el ángulo. El lado opuesto al ángulo es el cateto del triángulo que no ayuda a formar el ángulo.

Ejemplo 1

Examina el triángulo en el diagrama de abajo.



Identifica cual cateto es adyacente al ángulo N, qué cateto es opuesto al ángulo N, y cuál segmento es la hipotenusa.

La primera parte de la pregunta te pide identificar el cateto adyacente a $\angle N$. Ya que un cateto adyacente es el que contribuye a formar el ángulo y no es la hipotenusa, Debe ser $\overline{MN}$. La siguiente parte de la pregunta te pide identificar el cateto opuesto $\angle N$. Ya que un cateto opuesto no contribuye a formar el ángulo, debe ser $\overline{LM}$. La hipotenusa es siempre opuesta al ángulo rectángulo, así que en este triángulo es el segmento $\overline{LN}$.

La proporción de seno

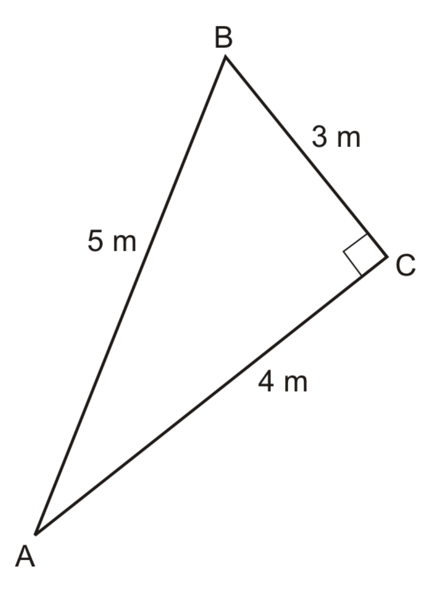
Otra proporción trigonométrica importante es el **seno**. Una proporción de seno siempre debe referirse a un ángulo particular en un triángulo rectángulo. El seno de un ángulo es la proporción de la longitud del cateto opuesto al ángulo con la longitud de la hipotenusa. Recuerda que en una proporción, colocas el primer elemento en la parte de arriba de la fracción y el segundo elemento en la parte de abajo.

Así que, la proporción del seno será

$$\text{sen x} = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}.$$

Ejemplo 2

Cuál es el sen A *y* sin B *en el triángulo de abajo?*



Todo lo que tienes que hacer para encontrar la solución es construir la proporción cuidadosamente.

$$\text{sen A} = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$\text{sen B} = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Así que, $\text{sen A} = 0.6$ y $\text{sen}B = 0.8$.

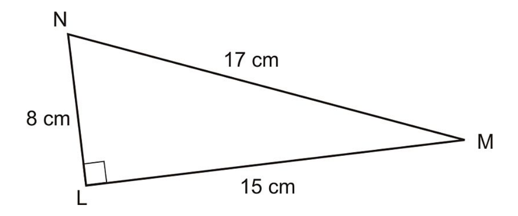
La proporción de Coseno

La siguiente proporción a examinar es llamada el **coseno**. El coseno es la proporción del lado adyacente de un ángulo con la hipotenusa. Usa las mismas técnicas que usaste para encontrar senos para encontrar los cosenos.

$$\cos(\text{ángulo}) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Ejemplo 3

Cuáles son los cosenos de $\angle M$ y $\angle N$ en el triángulo de abajo?



Para encontrar estas proporciones, identifica los lados adyacentes a cada ángulo y la hipotenusa. Recuerda que un lado adyacente es el que crea el ángulo y no es la hipotenusa.

$$\cos M = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{15}{17} \approx 0.88$$
$$\cos N = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{17} \approx 0.47$$

Entonces, el coseno de $\angle M$ es 0.88 y el coseno de $\angle N$ es 0.47.

Nota que $\triangle LMN$ NO es uno de los triángulos rectángulos especiales pero es un triángulo rectángulo cuyos lados son una terna Pitagórica.

Senos y cosenos de triángulos rectángulos especiales

Podría ayudarte el aprender algo de los valores más comunes para las proporciones del seno y el coseno. La tabla de abajo muestra los valores para ángulos en especial los triángulos rectángulos.

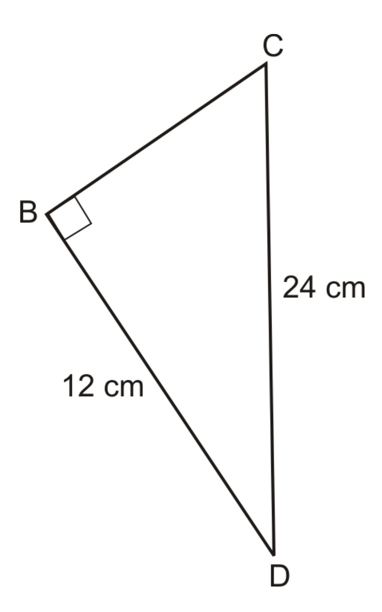
TABLE 1.3:

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\frac{1}{2} = 0.5$

Puedes usar estas proporciones para identificar ángulos en un triángulo. Trabaja en reversa desde la proporción. Si la proporción es igual a uno de estos valores, puedes identificar la medida del ángulo.

Ejemplo 4

Cual es la medida de $\angle C$ en el triángulo de abajo?



Nota: la figura no está a escala.

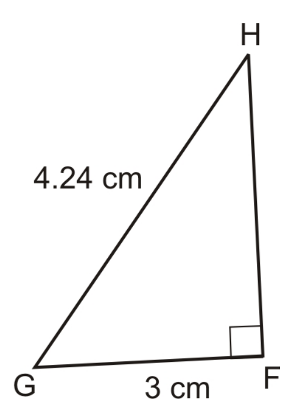
Encontrar el seno de $\angle C$ y compararlo a los valores en la tabla de abajo.

$$\begin{aligned}\sin C &= \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ &= \frac{12}{24} \\ &= 0.5\end{aligned}$$

Así que, el seno de $\angle C$ es 0.5. Si observas en la tabla, puedes ver que un ángulo que mide 30° tiene un seno de 0.5. Entonces, $m\angle C = 30°$.

Ejemplo 5

Cuál es la medida de $\angle G$ en el triángulo de abajo?



Encontrar el coseno de $\angle G$ y compararlo a los valores en la tabla previa.

$$\begin{aligned}\cos G &= \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \\ &= \frac{3}{4.24} \\ &= 0.708\end{aligned}$$

Entonces, el coseno de $\angle G$ es 0.708. Si observas en la tabla, puedes ver que un ángulo que mide 45° tiene un coseno de 0.707. Entonces, $\angle G$ mide 45°. Este es un triángulo rectángulo de $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$.

Resumen de la Lección

En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes proporciones trigonométricas ambas en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Las diferentes partes de los triángulos rectángulos.
- Cómo identificar y usar la proporción del seno en un triángulo rectángulo.
- Cómo identificar y usar la proporción del coseno en un triángulo rectángulo.
- Cómo aplicar las proporciones de seno y coseno en triángulos rectángulos especiales.

Estas habilidades te ayudaran a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas de encontrar relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo.

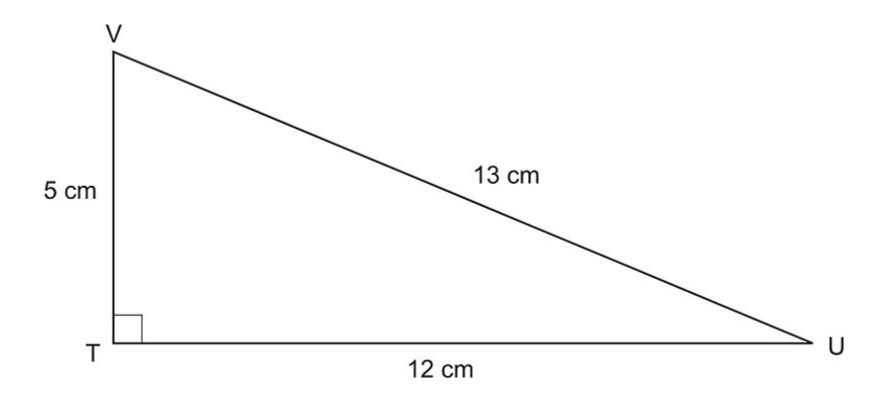
Puntos a considerar

Antes que empieces la siguiente lección, piensa en las estrategias que podrías usar para simplificar una ecuación que contiene una función trigonométrica.

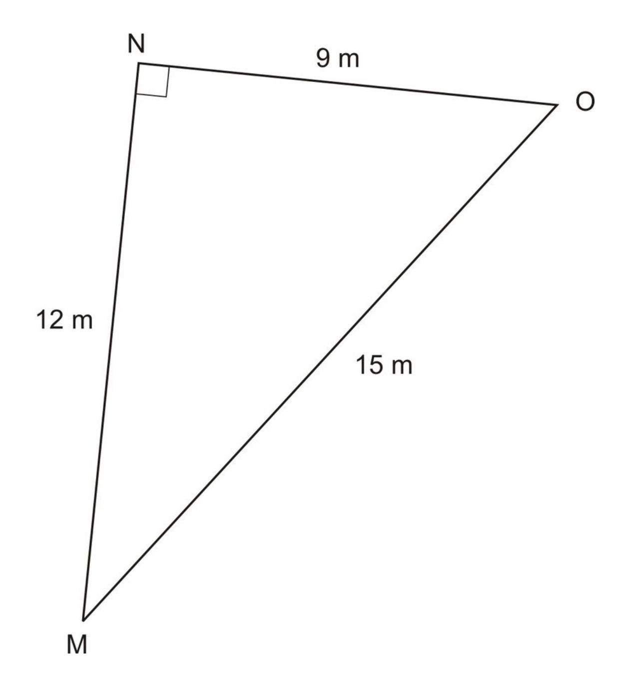
Nota, que puedes usar solamente las proporciones de $\sin, \cos,$ y tan en los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Por ahora sólo tiene sentido hablar sobre las proporciones de $\sin, \cos,$ o tan de un ángulo agudo. Después en tus estudios matemáticos redefiniras estas proporciones de una manera en que puedas hablar sobre $\sin, \cos,$ y tan de ángulos agudos, obtudos, y aún ángulos negativos.

Ejercicios de repaso

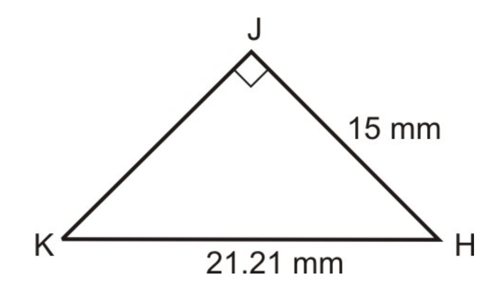
Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 1-3.



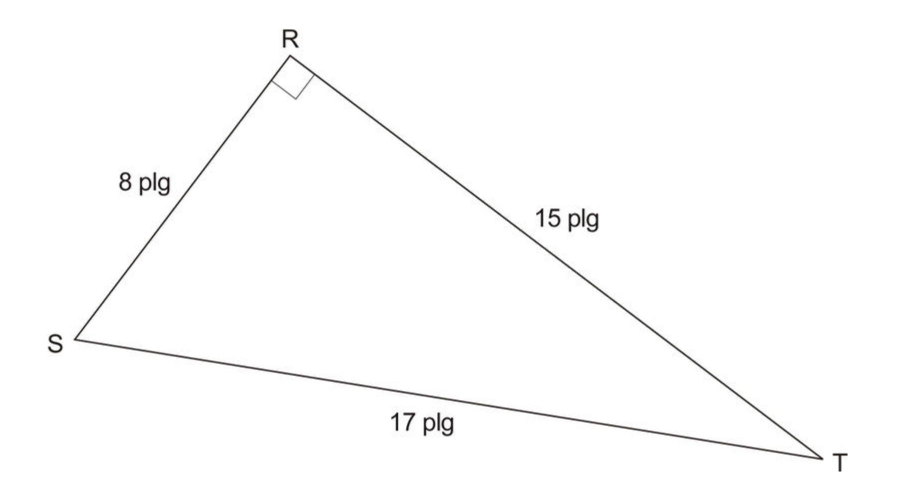
1. Cual es el seno de $\angle V$?
2. Cual es es coseno de $\angle V$?
3. Cual es el coseno de $\angle U$? Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 4-6.



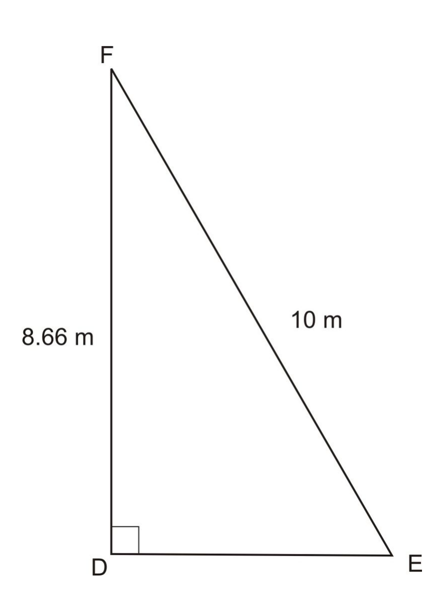
4. Cual es es seno de $\angle O$?
5. Cual es el coseno de $\angle O$?
6. Cual es el seno de $\angle M$?
7. Cual es la medida de $\angle H$ en el diagrama de abajo?



Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 8-9.



8. Cual es el seno de $\angle S$?
9. Cual es el coseno de $\angle S$?
10. Cual es la medida de $\angle E$ en el triángulo de abajo?



Respuestas

1. $\frac{12}{13} \approx 0.923$ cm
2. $\frac{5}{13} \approx 0.385$ cm
3. $\frac{12}{13} \approx 0.923$ cm
4. $\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$ pulgadas
5. $\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6$ pulgadas
6. $\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6$ pulgadas
7. 45°
8. $\frac{8}{17} \approx 0.471$
9. $\frac{15}{17} \approx 0.882$
10. 60°

1.7 Proporciones Inversas Trigonométricas

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar y usar la proporción arcotangente en un triángulo rectángulo.
- Identificar y usar la proporción arcoseno en un triángulo rectángulo.
- Identificar y usar la proporción arcocoseno en un triángulo rectángulo.
- Comprender las tendencias generales de las proporciones trigonométricas.

Introducción

La palabra **inverso** probablemente se te hace familiar frecuentemente en matemáticas, después de aprender a hacer una operación, también aprendiste cómo "deshacerla". Efectuando el inverso de una operación es una forma de deshacer la operación original. Por ejemplo, podrías recordar que la adición y sustracción son consideradas operaciones inversas. La multiplicación y división también son operaciones inversas. En álgebra solías usar operaciones inversas para resolver ecuaciones y desigualdades. También podrías recordar el término "inverso aditivo", o un número que puede ser sumado al original para producir una suma de 0. Por ejemplo, 5 y -5 son inversos aditivos porque $5+(-5)=0$.

En esta lección aprenderás a usar las operaciones inversas de las funciones trigonométricas que has estudiado hasta ahora. Tú puedes usar las funciones trigonométricas inversas para encontrar la medida de ángulos cuando conoces las longitudes de los lados en un triángulo rectángulo.

Tangente inversa

Cuando encuentras el inverso de una función trigonométrica, colocas la palabra *arco* frente a ella. Entonces, el inverso de una tangente es llamado el arcotangente (o arctan para abreviarlo). Piensa en el arcotangente como una herramienta que puedes usar como cualquier otra operación inversa cuando resuelves un problema. Si la tangente te dice la proporción de las longitudes de los lados opuesto y adyacente a un ángulo, entonces el arcotangente te dice la medida de un ángulo con una proporción dada.

Vamos a suponer $\tan X = 0.65$. El arcotangente puede ser usado para encontrar la medida de $\angle X$ en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\arctan(\tan X) = \arctan(0.65)$$
$$m\angle X = \arctan(0.65) \approx 33^\circ$$

De dónde vino 33° ? Hay dos formas básicas para encontrar un arcotangente. Algunas veces te darán una tabla de valores trigonométricos y los ángulos a los cuales ellos corresponden. En este escenario, encontrar el valor que más se acerca al provisto, e identificar el ángulo correspondiente.

Otra forma fácil de encontrar el arcotangente es usar la calculadora. El botón de arcotangente debe estar etiquetado "arctan," "atan," o " $\tan^{-1}$." De cualquier forma, seleccionar este botón, e ingresar el valor en cuestión. En este caso, podrías presionar el botón de arcotangente e ingresar 0.65 (o en algunas calculadoras, ingresar .65, luego presionar "arctan"). el resultado será el valor de la medida de $\angle X$.

$$m\angle X = \arctan(0.65)$$
$$m\angle X \approx 33$$

$m\angle X$ es 33°.

Ejemplo 1

Resolver para $m\angle Y$ *if* $\tan Y = 0.384$

Puedes usar el inverso de la tangente, el arcotangente para encontrar este valor.

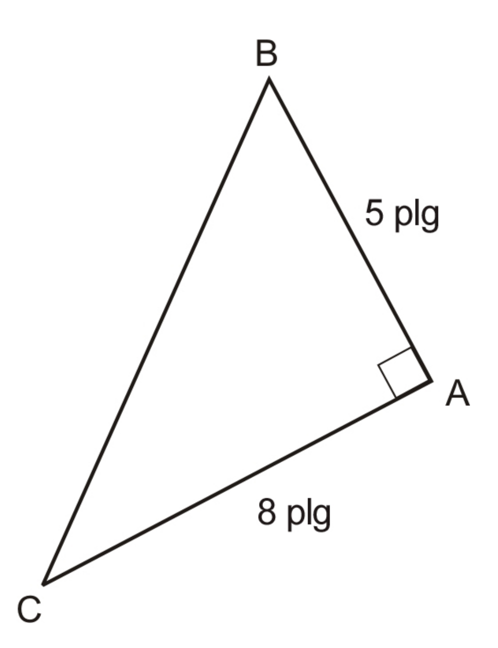
$$\arctan(\tan Y) = \arctan(0.384)$$
$$m\angle Y = \arctan(0.384)$$

Luego usa tu calculadora para encontrar el arcotangente de 0.384.

$$m\angle Y \approx 21^\circ$$

Ejemplo 2

Cual es $m\angle B$ *en el triángulo de abajo?*



Primero identifica la proporción trigonométrica apropiada relacionada con $\angle B$ que puede ser encontrada usando los lados dados. La tangente usa los lados opuestos y adyacentes, así que eso será relevante aquí.

$$\tan B = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{8}{5} = 1.6$$

Ahora usa el arcotangente para resolver la medida de $\angle B$.

$$\arctan(\tan B) = \arctan(1.6)$$
$$m\angle B = \arctan(1.6)$$

Luego usa tu calculadora para encontrar el arcotangente de 1.6.

$$m\angle B \approx 58^\circ$$

Seno inverso

Justo como usaste el arcotangente como la operación inversa para la tangente, también puedes usar el arcoseno (abreviado como arcsen) como la operación inversa para el seno. Las mismas reglas aplican. Puedes usarlo para aislar una variable para la medición de un ángulo, pero debes ejecutar la operación en ambos lados de la ecuación. Cuando conoces el valor del arcoseno, usa una tabla o una calculadora para encontrar la medida del ángulo.

Ejemplo 3

Resolver para $m\angle P$ *si* $\sin P = 0.891$

Puedes usar el inverso del seno, el arcoseno para encontrar este valor.

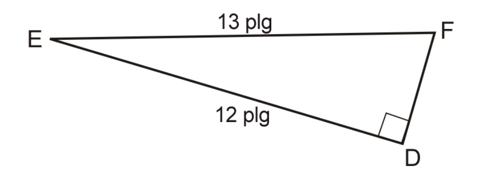
$$\arcsin(\sin P) = \arcsin(0.891)$$
$$m\angle P = \arcsin(0.891)$$

Luego usa tu calculadora para encontrar el arcoseno de 0.891.

$$m\angle P \approx 63^\circ$$

Ejemplo 4

Cuanto mide $m\angle F$ *en el triángulo de abajo?*



Primero identifica la proporción trigonométrica apropiada relacionada con el ángulo F que puede ser encontrada usando los lados dados. El seno usa el lado opuesto y la hipotenusa, así que eso será relevante aquí.

$$\sin F = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$
$$\sin F = \frac{12}{13}$$
$$\sin F \approx 0.923$$

Ahora usa el arcoseno para aislar el valor del ángulo F.

$$\arcsin(\sin F) = \arcsin(0.923)$$
$$m\angle F = \arcsin(0.923)$$

Finalmente, usa tu calculadora para encontrar el arcoseno de 0.923.

$$m\angle F \approx 67^\circ$$

Coseno inverso

La última proporción trigonométrica inversa es el arcocoseno (con frecuencia abreviado arccos). Las mismas reglas aplican para el arcocoseno como aplican para todas las otras funciones trigonométricas inversas. Puedes usarla para aislar una variable para la medición de un ángulo, pero debes ejecutar la operación en ambos lados de la ecuación. Cuando conoces el valor del arcocoseno, usa una tabla o calculadora para encontrar le medida del ángulo.

Ejemplo 5

Resolver para $m\angle Z$ si $\cos Z = 0.31$.

Puedes usar el coseno inverso, el arcocoseno, para encontrar este valor.

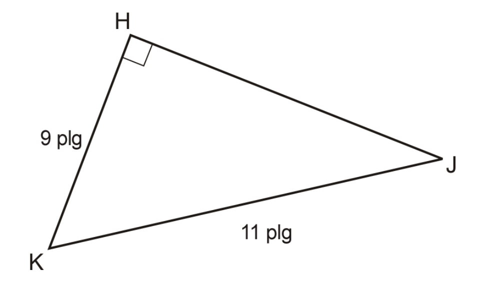
$$\arccos(\cos Z) = \arccos(0.31)$$
$$m\angle Z = \arccos(0.31)$$

Luego usa tu calculadora para encontrar el arcocoseno de 0.31.

$$m\angle Z \approx 72^\circ$$

Ejemplo 6

Cuanto mide $\angle K$ en el triángulo de abajo?



Primero identifica la proporción trigonométrica apropiada relacionada con $\angle K$ tque puede ser encontrada usando los lados dados.. El coseno usa el lado adyacente y la hipotenusa, así que eso será relevante aquí.

$$\begin{aligned}\cos K &= \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}\\ &= \frac{9}{11}\\ &= 0.818\end{aligned}$$

Ahora usa el arcocoseno para aislar el valor de $\angle K$.

$$\begin{aligned}\arccos(\cos K) &= \arccos(0.818)\\ m\angle K &= \arccos(0.818)\end{aligned}$$

Finalmente usa tu calculadora o una tabla para encontrar el arcocoseno de 0.818.

$$m\angle K \approx 35^\circ$$

Tendencias generales en las proporciones trigonométricas

Ahora que sabes como encontrar las proporciones trigonométricas así como también sus inversas, es útil observar las tendencias en los diferentes valores. Recuerda que cada proporción tendrá un valor constante para un ángulo específico. En cualquier triángulo rectángulo, el seno de un ángulo de 30° siempre será 0.5—no importa que tan largos sean los lados. Puedes usar esa información para encontrar longitudes faltantes en triángulos donde conoces los ángulos, o identificar la medida de un ángulo si conoces dos de los lados.

Examina la tabla de abajo para las tendencias. Muestra el seno, coseno, y valores de tangente para ocho diferentes medidas de ángulos.

TABLE 1.4:

	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
Seno	0.174	0.342	0.5	0.643	0.766	0.866	0.940	0.985
Coseno	0.985	0.940	0.866	0.766	0.643	0.5	0.342	0.174
Tangente	0.176	0.364	0.577	0.839	1.192	1.732	2.747	5.671

Ejemplo 7

Usando la tabla de arriba, que valor se esperaría que fuera mayor: el seno de 25° *o el coseno de* 25°*?*

Puedes usar la información en la tabla para resolver este problema. El seno de 20° es 0.342 y el seno de 30° es 0.5. Entonces, el seno de 25° estará entre los valores 0.342 y 0.5. El coseno de 20° es 0.940 y el coseno de 30° es 0.866. entonces, el coseno de 25° estará entre los valores de 0.866 y 0.940. Ya que el rango para el coseno es mayor que el rango para el seno, puede ser asumido que el coseno de 25° será mayor que el seno de25°.

Observa que conforme la medida del ángulo se acerca a 90°, el sin se acerca a 1. Del mismo modo, conforme el valor del los ángulos se acerca a 90°, el cos se acerca a 0. En otras palabras, a medida el sin se hace mayor, el cos se hace pequeño para los ángulos en esta tabla.

La tangente, por otro lado, se incrementa rápidamente desde un pequeño valor a uno grande (infinito, de hecho) a medida el ángulo se aproxima a 90°.

Resumen de la lección

En esta lección exploramos, como trabajar con diferentes radicales ambos en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Como identificar y usar la proporción arcotangente en un triángulo rectángulo.
- Como Identificar y usar la proporción arcoseno en un triángulo rectángulo.
- Como identificar y usar la proporción arcocoseno en un triángulo rectángulo.
- Como comprender las tendencias generales de las proporciones trigonométricas.

Estas habilidades te ayudaran a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas de encontrar relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo.

Puntos a considerar

A este punto, todas las proporciones trigonométricas que has estudiado se han ocupado exclusivamente con triángulos rectángulos. Puedes pensar en una manera de usar trigonometría en triángulos que son agudos u obtusos?

Ejercicios de Repaso

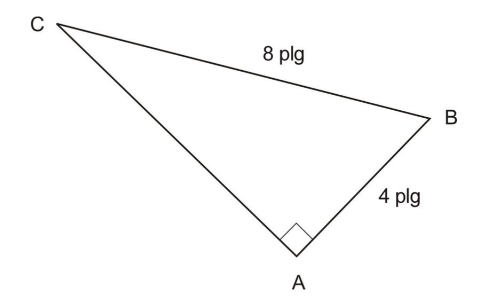
1. Resolver para $m\angle G$.

$$\cos G = 0.53$$

2. Resolver para $m\angle V$.

$$\tan V = 2.25$$

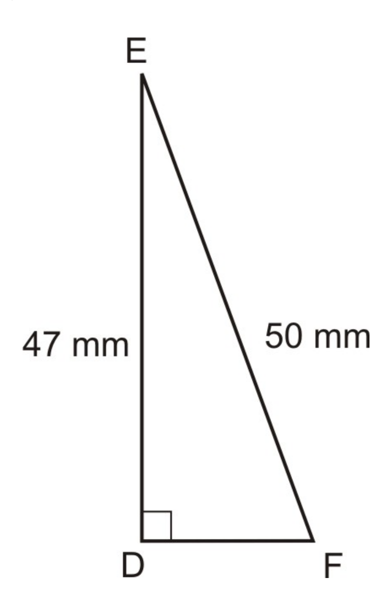
3. Cuanto mide $\angle B$ en el triángulo de abajo?



4. Resolver para $m\angle M$.

$$\sin M = 0.978$$

5. Cuanto mide $\angle F$ en el triángulo de abajo?



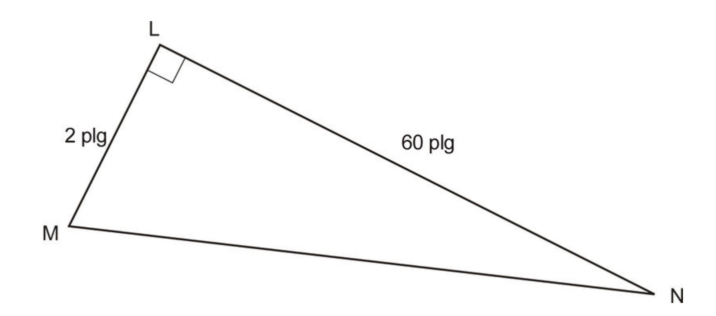
6. Resolver para $m\angle L$.

$$\tan L = 1.04$$

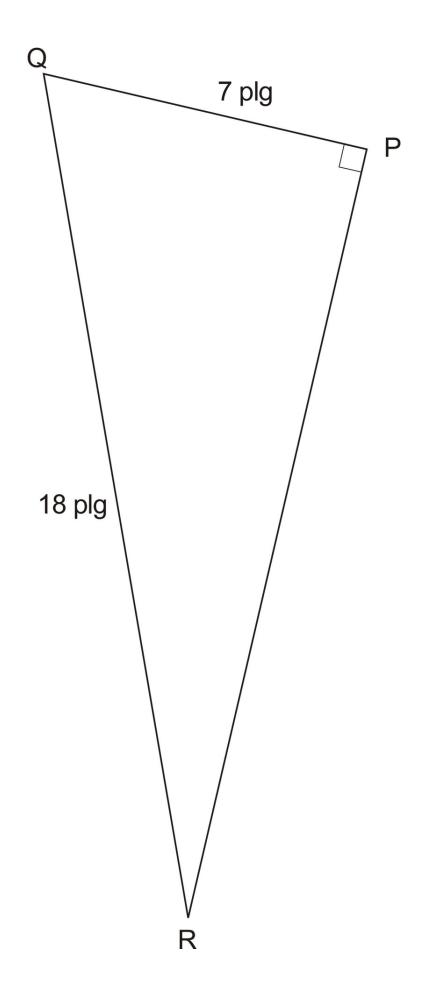
7. Resolver para $m\angle D$.

$$\cos D = 0.07$$

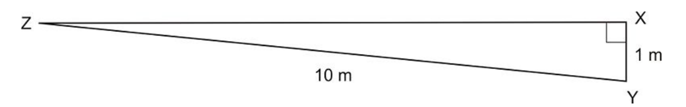
8. Cuanto mide $\angle M$ en el triángulo de abajo?



9. Cuanto mide $\angle Q$ en el triángulo de abajo?



10. Cuanto mide $\angle Z$ en el triángulo de abajo?



Respuestas

1. 58°
2. 66°
3. 60°
4. 78°
5. 70°
6. 46°
7. 86°
8. 89°
9. 67°
10. 5.7°

1.8 Triángulos Agudos y Obtusos

Objetivos de aprendizaje

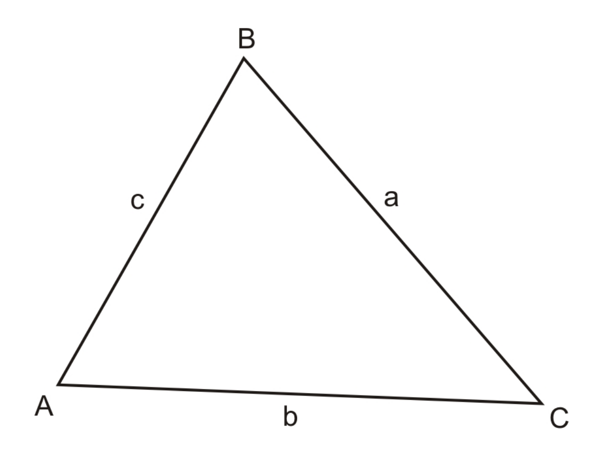
- Identificar y usar la ley de senos.
- Identificar y usar la ley de Cosenos.

Introducción

Trigonometría es is most commonly learned on right triangles, pero las proporciones pueden tener usos para otro tipo de triángulos también. Esta lección se enfoca en como puedes aplicar las proporciones de seno y coseno a los ángulos en triángulos agudos o triángulos obtusos. Recuerda que en un triángulo agudo, todos los ángulos miden menos de 90°. En un triángulo obtuso, habrá un ángulo que tiene una medida que es mayor que 90°.

La ley de senos

La **Ley de senos** establece que en cualquier triángulo, la proporción de la longitud de un lado con el seno del ángulo opuesto a él será constante. Eso es, la proporción es la misma para los tres ángulos y sus lados opuestos. En consecuencia, si encuentras la proporción, puedes usarla para encontrar la medida del ángulo faltante y las longitudes de los lados.

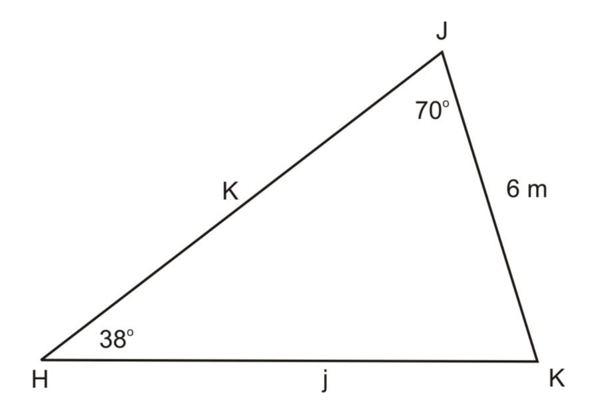


$$\frac{a}{\text{senA}} = \frac{b}{\text{senB}} = \frac{c}{\text{senC}}$$

Observa la convención que A denota $\angle A$ y a es la longitud del lado opuesto a $\angle A$.

Ejemplo 1

Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cual es la longitud del lado llamado j?

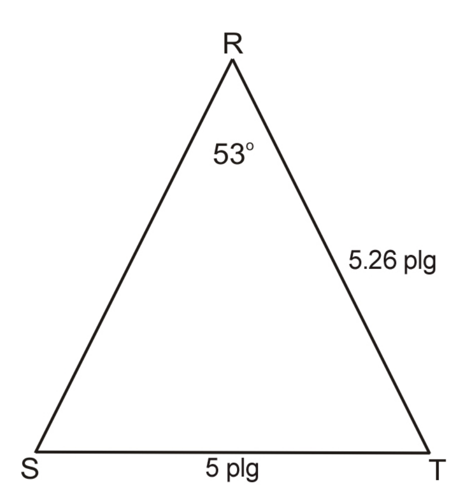
Puedes usar la ley de senos para resolver este problema. Porque tienes un lado y el ángulo opuesto, puedes encontrar la constante que aplica a todo el triángulo. Esta proporción será igual a la proporción del lado j y $\angle J$. Puedes usar tu calculadora para encontrar el valor de los senos.

$$\begin{aligned}
\frac{h}{\sin H} &= \frac{j}{\sin J} \\
\frac{6}{\sin 38} &= \frac{7}{\sin 70} \\
\frac{6}{0.616} &= \frac{j}{0.940} \\
9.74 &= \frac{j}{0.940} \\
9.2 &\approx j
\end{aligned}$$

Entonces, usando la ley de los senos, la longitud de j es 9.2 metros.

Ejemplo 2

Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide $\angle S$?

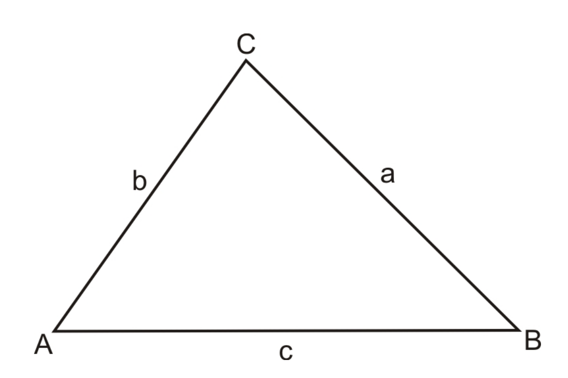
Puedes usar la ley de los senos para resolver este problema. Porque tienes un lado y el ángulo opuesto a él, puedes encontrar la constante que aplica a todo el triángulo. Esta proporción será igual a la proporción del lado r y el ángulo R. Puedes usar tu calculadora para encontrar el valor de los senos.

$$\frac{r}{\sin R} = \frac{s}{\sin S}$$
$$\frac{5}{\sin 53} = \frac{5.26}{\sin S}$$
$$\frac{5}{0.788} = \frac{5.26}{\sin S}$$
$$6.345 = \frac{5.26}{\sin S}$$
$$(6.345) \cdot \sin S = 5.26$$
$$\sin S = \frac{5.26}{6.345}$$
$$\sin S = 0.829$$
$$\arcsin(\sin S) = \arcsin 0.829$$
$$m\angle S \approx 56^\circ$$

Entonces, usando la ley de los senos, el ángulo llamado S debe medir 56°.

La ley de Cosenos

Existe otra ley que funciona en triángulos agudos y obtusos además de los triángulos rectángulos. La **Ley de cosenos** usa la proporción de coseno para identificar tanto longitudes de lados y ángulos faltantes. Para usar la ley de cosenos, debes tener tanto la medida de los tres lados, o la medida de dos lados y la medida del ángulo incluido.

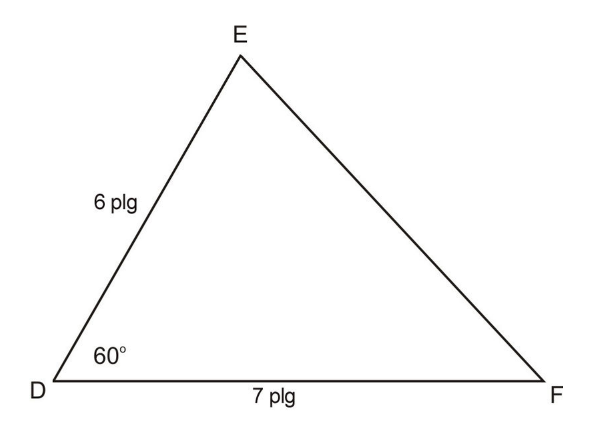


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C)$$

No importa como asignes las variables a los tres lados del triángulo, pero el ángulo C debe ser opuesto al lado c.

Ejemplo 3

Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide el lado $\overline{EF}$?

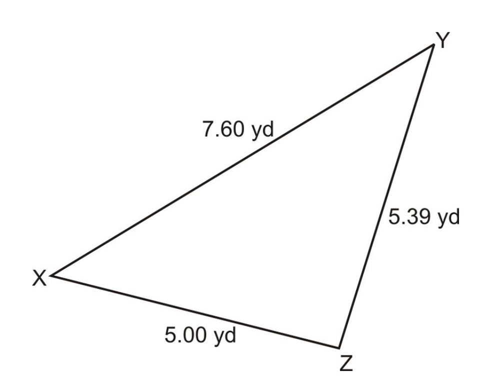
Usa la ley de cosenos para encontrar EF. Ya que $\overline{EF}$ es opuesto a $\angle D$, llamaremos a la longitud de $\overline{EF}$ con la letra d.

$$
\begin{aligned}
d^2 &= e^2 + f^2 - 2ab(\cos D) \\
d^2 &= (6)^2 + (7)^2 - 2(6)(7)(\cos 60) \\
d^2 &= 36 + 49 - 84(\cos 60) \\
d^2 &= 85 - 84(0.5) \\
d^2 &= 85 - 42 \\
d^2 &= 43 \\
d &= \sqrt{43} \\
d &\approx 6.56
\end{aligned}
$$

Así que, EF tiene 6.56 pulgadas.

Ejemplo 4

Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide $\angle X$?

Usa la ley de cosenos para encontrar la medida de $\angle X$.

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz(\cos X)$$
$$(5.39)^2 = (5)^2 + (7.6)^2 - 2(7.6)(5)(\cos X)$$
$$29.05 = 25 + 57.76 - 76(\cos X)$$
$$29.05 = 82.76 - 76(\cos X)$$
$$-53.71 = -76(\cos X)$$
$$0.707 = (\cos X)$$
$$\arccos(0.707) = \arccos(cosX)$$
$$45^\circ \approx m\angle X$$

Así que, $m\angle X$ tiene 45°.

Resumen de la Lección

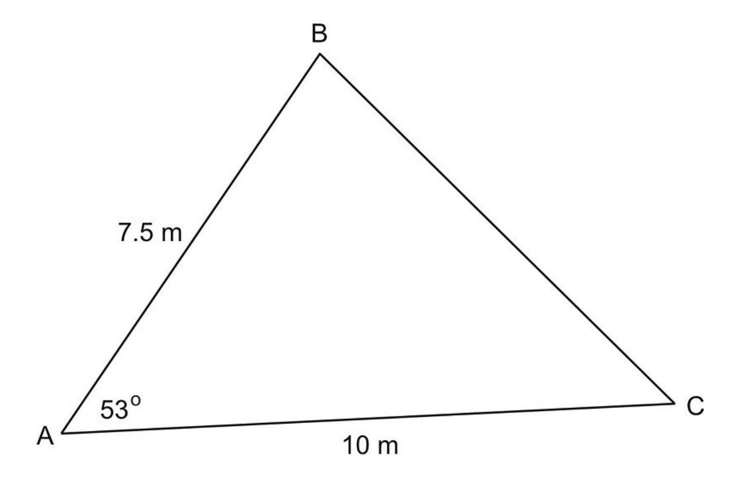
En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes expresiones radicales tanto en teoría como en situaciones prácticas. Especificamente, hemos aprendido:

- como identificar y usar la ley de los senos.
- como identificar y usar la ley de los cosenos.

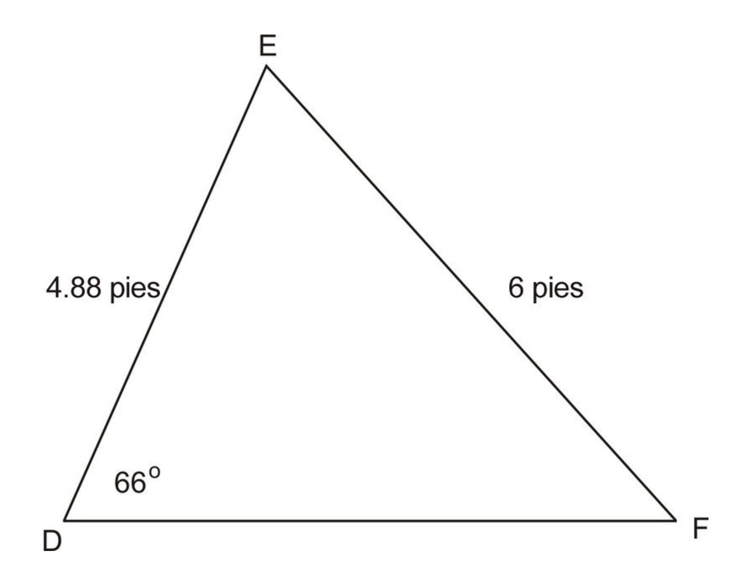
Estas habilidades te ayudaran a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas de encontrar relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo.

Ejercicios de Repaso

Los ejercicios 1 y 2 usan el triángulo del siguiente diagrama.

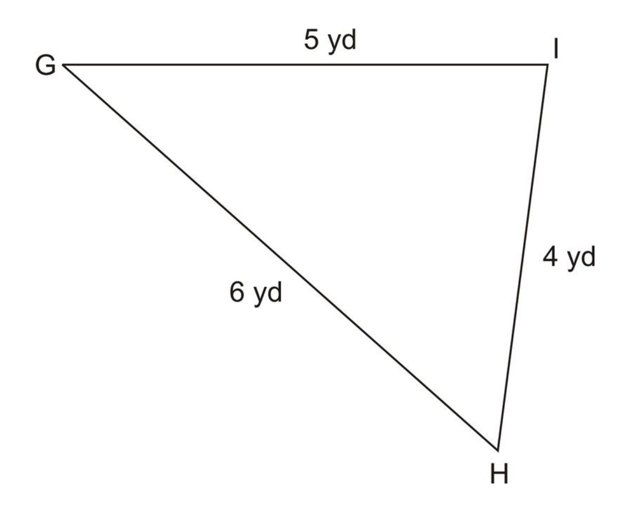


1. Cual es la longitud del lado BC?
2. Cual es $m\angle C$?
3. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



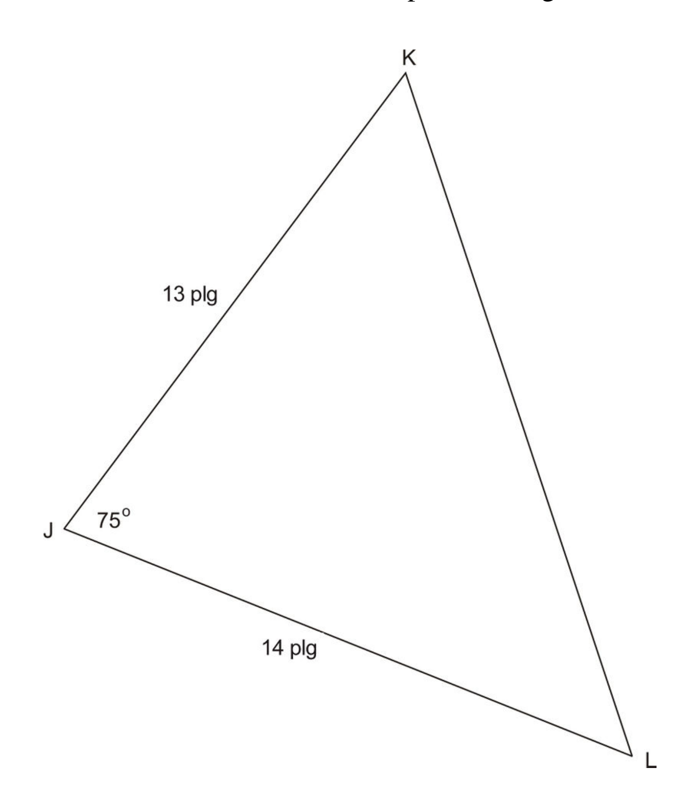
Cuanto mide $\angle F$?

4. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



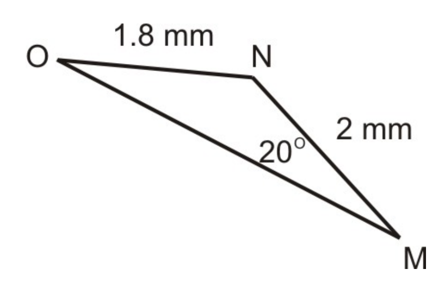
Cuanto mide $\angle I$?

5. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.

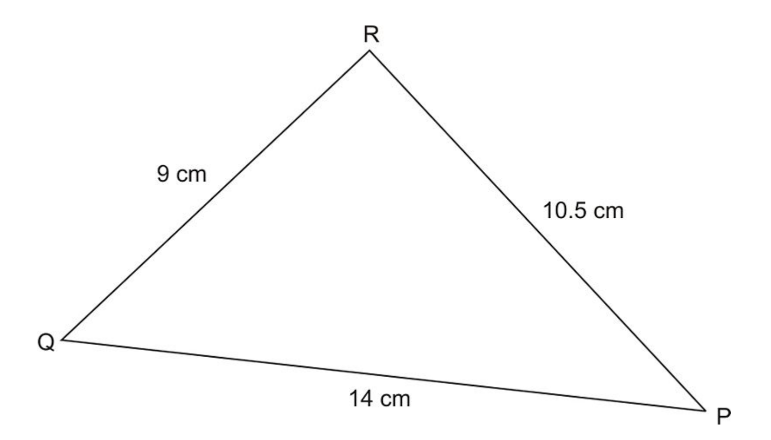


Cuanto mide el lado KL?

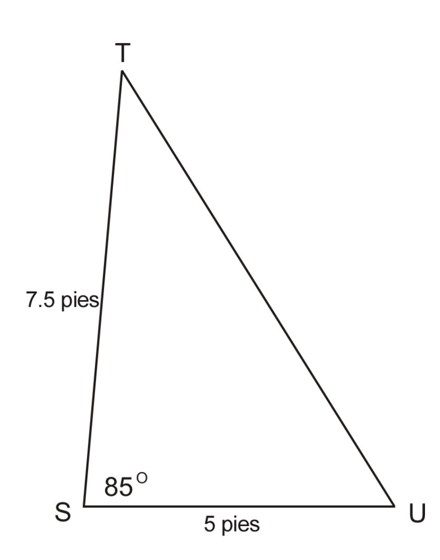
6. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide $\angle O$? Usa el triángulo en el siguiente diagrama para los ejercicios 7 y 8.

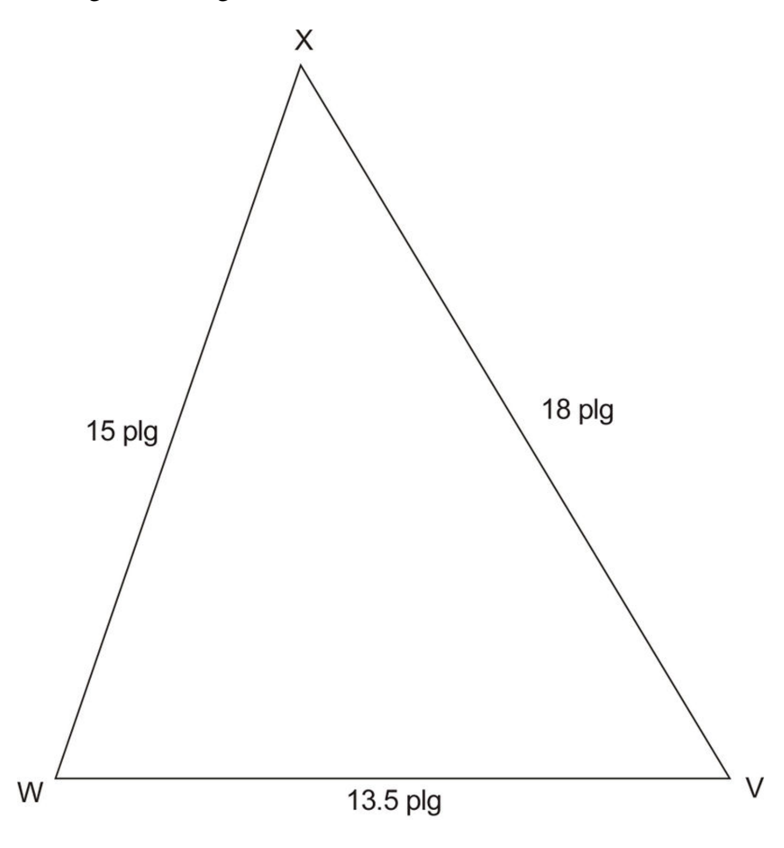


7. What is the measure of $\angle P$?
8. What is the measure of $\angle Q$?
9. Examine the triangle in the following diagram.



Cuanto mide $\angle T$?

10. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide $\angle W$?

Respuestas

1. 8 pulgadas
2. 47.6°
3. 48°
4. 83°
5. 16.5 pulgadas

6. 22.3°
7. 40°
8. 48.6°
9. 35°
10. 78°